Soc
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167.

Exchange

October 9, 1908.

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VII.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 8.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

1907

MAR 27 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Ag 32/14

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec tim de.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedländer u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

1907

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME VII.

1. Les projections cartographiques ; par Ch. Duchesne.

2. Cinq études de Géométrie analytique ; par M. Stuyvaert.

3. Structure anatomique du péricarpe et du spermoderme chez les Renonculacées. Recherches complémentaires ; par Hyac. Lonay.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(AOUT 1907).

Bureau.

Président,	M.	M. Dehalu.
Vice-Président,	»	J. Beaupain.
Secrétaire général,	»	C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	»	J. Fairon.

Membres effectifs.

1870 Masius, V., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 Fraipont, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ubaghs, P., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur principal au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1898 Hubert, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, assistant à l'université.

1902 Dehalu, M., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

Fairon, J., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1906 Abraham, A., docteur en sciences, assistant à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1866 Ledent, directeur de l'École des textiles de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.

Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1873 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.

Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

1898 Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, à Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'université de Fribourg (Suisse).

Schönfliess, professeur à l'université de Kœnigsberg in Pr.

Capelli, Alfr., professeur à l'université de Naples.

Meyer, Franz, professeur à l'université de Kœnigsberg in Pr.

W. Kapteyn, professeur à l'université d'Utrecht.

1905 Traube, professeur, à Berlin.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.

Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem.

Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli, professeur à l'université de Pavie.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.

1881 Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).

Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.

Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1904 Durrand, Th., directeur du jardin botanique de l'État à Bruxelles, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Barrois, C., professeur à l'université de Lille.

Boule, Marcellin, professeur au Museum, à Paris.

Gaudry, A., membre de l'Institut, à Paris.

Oehlert, D., conservateur du Musée de Laval (Mayenne).

Portis, A., professeur à l'université de Rome.

von Koenen, A., professeur à l'université de Gœttingen.

de Loriol, P., géologue, à Fontenex.

Grand'Eury, F., ingénieur, à Saint-Étienne.

de Rouville, P., doyen honoraire, à Montpellier.

Cocchi, J., directeur du Musée, à Florence.

Delgado, J.-N., directeur du Service géologique, à Lisbonne.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens, M. LAISANT (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Genève. — *L'enseignement mathématique,* directeurs : MM. Fehr et Laisant (rue Plantamour, 19).

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge (Mass.). — *Museum of comparative Zoology.*

Halifax. — *Nova Scotian Institute of Natural Science.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*
Carnegie Institution.

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Australian Association for advancement of science.*
Linnean Society.
Royal Society of New South Wales.

LES

PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

PAR

Ch. DUCHESNE

DOCTEUR EN GÉOGRAPHIE
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

La cartographie a pour objet la représentation des détails planimétriques d'une portion de la surface du globe. La méthode la plus simple consiste à faire le dessin sur une portion de surface bombée, à une échelle déterminée : c'est la méthode préconisée par Élisée Reclus ; elle n'est pas entrée dans le domaine de la pratique.

Les méthodes de la géométrie descriptive, qui sont adoptées pour les dessins à l'usage des ingénieurs et des architectes, ne sont pas admises par les cartographes ; ceux-ci n'ont adopté que la projection sur un seul plan (cartes orthographiques), et cette méthode est rarement employée, sauf pour les régions peu étendues (plan d'une ville, d'un canton).

La méthode de la perspective donne des résultats défectueux ; elle n'est jamais employée. Il existe, il est vrai, des cartes dénommées « cartes perspectives », mais cette dénomination est erronée, car pour ces cartes on n'applique pas les règles que suivent les peintres pour le tracé de leurs tableaux.

Le cartographe a recours à des méthodes qui lui sont propres ; il peut imaginer des systèmes en nombre infini, et chacun d'eux jouit de propriétés particulières.

Mais, quel que soit le système adopté, le dessin plan ne donnera jamais une représentation exacte : les distances sont altérées, les angles sont déformés, les aires sont agrandies ou amoindries.

Il est possible de construire des cartes où l'une des deux dernières altérations est évitée, mais la première est inévitable; ainsi toute représentation cartographique donne lieu à deux ou à trois sortes d'altérations.

Première partie. — La manière la plus facile, mais non la plus logique, de mesurer les altérations, consiste à comparer des portions infiniment petites correspondantes du globe et de la carte.

Les altérations ainsi mesurées sont appelées « altérations locales »; leur étude fait l'objet de la première partie de ce travail.

Tissot a donné les formules qui permettent de calculer les altérations quand un système est défini par des équations entre les coordonnées sphériques et les coordonnées de la carte; nous avons simplifié l'exposé de ces formules et nous l'avons complété. (Calcul des caractéristiques *a* et *b*.)

Tissot a imaginé d'appliquer aux cartes une théorie analogue à celle de l'indicatrice de Dupin pour la courbure des surfaces; mais l'indicatrice de Tissot, si intéressante qu'elle soit, est sans application pratique; nous proposons de la remplacer par les caractéristiques T_m, Δ_m, Δ_s; ces trois nombres caractérisent les trois altérations et ils en donnent immédiatement la mesure.

Dans cette première partie du travail, nous avons passé en revue la plupart des cartes étudiées dans les divers traités; nous avons suivi un double but : d'une part, réduire le nombre des systèmes de représentations en créant des familles de cartes;

d'autre part, imaginer de nouvelles cartes, afin surtout de montrer que la variété en est innombrable.

Dans le premier but nous avons proposé deux familles : la famille cosinus et la famille sinus-tangente; chacune de ces deux familles renferme presque toutes les cartes à symétrie centrale.

Dans le deuxième but nous avons étudié : la carte de Flamsteed modifiée, la carte de Mollweide modifiée, les cartes à parallèles elliptiques, les cartes à méridiens rectilignes et parallèles, les cartes à deux axes de symétrie, etc.

Nous avons fait une catégorie spéciale des cartes dites « perspectives », pour faire ressortir que ces cartes ne jouissent d'aucune propriété pratique.

Un paragraphe est consacré à l'étude de la méthode préconisée par Tissot pour la carte d'Espagne. Cet auteur s'est imposé des conditions sans portée pratique, et la manière de résoudre le problème ainsi posé n'est pas la plus judicieuse. Nous avons insisté sur ce problème parce que cette méthode est signalée par beaucoup d'auteurs sans être critiquée.

La première partie du travail se termine par l'exposé de la méthode à suivre pour le choix d'un mode de représentation quand on n'a en vue que les altérations locales.

Deuxième partie. — La deuxième partie est consacrée à l'étude des cartes obtenues par projection sur surface développable; nous constatons que cette méthode n'a rien de nécessaire ni de logique; elle doit être absolument écartée et le mot « projection » devrait être biffé de la terminologie de la cartographie.

Troisième partie. — Dans la troisième partie nous étudions les altérations intégrales. Nous entendons par là, celles

que l'on mesure en comparant deux portions finies correspondantes de la carte et du globe.

Cette étude n'a guère été entreprise avant nous; nous ne nous dissimulons pas combien notre étude est incomplète; nous avons pu montrer que les altérations intégrales ne sont pas en corrélation avec les altérations locales; nous proposons une méthode nouvelle pour le calcul de l'échelle qui figure en marge des cartes.

Quatrième partie. — Dans la quatrième partie nous étudions la manière de choisir le système cartographique convenant à une région déterminée.

Nous montrons d'abord que cette question ne présente aucun intérêt quand la plus grande dimension de la région est inférieure à 7 degrés. Cette remarque n'avait pas été faite avant nous; pourtant elle s'impose : la carte est un dessin, et dans tout procédé graphique on *doit* négliger les grandeurs plus petites que la précision d'un dessin.

Pour découvrir les qualités qu'une carte doit présenter, nous avons recherché de quelle manière on fait usage d'une carte pour étudier une question de géographie.

Beaucoup d'auteurs s'écartent de cette voie, cependant si naturelle, soit qu'ils se laissent distraire par le dessin du réseau des parallèles et méridiens (question sans importance), soit qu'ils attribuent aux propriétés géométriques une importance qu'elles n'ont pas (comme, par exemple, la suppression des altérations d'angle).

Nous avons traité quelques exemples et, entre autres, nous avons construit une mappemonde en deux cartes; nous avons eu l'occasion d'y appliquer les formules relatives aux altérations intégrales.

Cinquième partie. — La cinquième partie est relative aux cartes en plusieurs fragments.

Nous avons traité longuement ce sujet parce qu'il nous paraît que ce procédé devrait être d'une application plus fréquente. Comme exemple, nous avons construit une mappemonde en quatorze cartes et une mappemonde en douze cartes.

Nous espérons avoir démontré rigoureusement la conclusion de ce travail :

« L'étude des projections cartographiques donne lieu à des » problèmes mathématiques très intéressants, mais le choix » judicieux d'une carte est une question qui doit être résolue » par des procédés graphiques; le calcul mathématique ne doit » pas être la base de ces recherches, il doit seulement les com- » pléter et, souvent, le calcul n'est pas indispensable. »

TABLE DES MATIÈRES

			Pages.
Préliminaires			1
PREMIÈRE PARTIE. — **Altérations locales.**			3
Chapitre	I.	Définition des altérations locales	3
—	II.	Première classe. Cartes cylindriques	14
—	III.	Deuxième classe. Cartes azimutales	21
—	IV.	Troisième classe. Projections perspectives	27
—	V.	Projections intermédiaires	33
—	VI.	Quatrième classe. Cartes coniques et tronconiques	43
—	VII.	Deuxième groupe. Complément de la théorie des altérations	52
—	VIII.	Cinquième classe. Sur la carte, les cercles de latitude sont représentés par des droites parallèles	56
		Sixième classe. Formules pour le changement de variables	71
—	IX.	Cartes à parallèles circulaires et concentriques	73
—	X.	Septième classe. Cartes à deux axes de symétrie	79
—	XI.	Théorie générale des cartes authaliques	94
—	XII.	Théorie générale des cartes orthomorphes	97
—	XIII.	Étude des cartes où la plus grande altération locale est minimum	104
—	XIV.	Cartes azimutales discontinues	135
—	XV.	Conclusions de la première partie.	137

Pages.

DEUXIÈME PARTIE. — **Projections sur surface développable** 141

TROISIÈME PARTIE. — **Altérations intégrales** . . . 145

CHAPITRE I. Échelle de superficie. 145

— II. Échelle linéaire 146

— III. Écart orthodromique 157

QUATRIÈME PARTIE. — **Usage des cartes géographiques. Choix d'un système de projection** . . 159

CHAPITRE I. Globes terrestres. 159

— II. Usage des cartes 161

— III. Cartes de régions peu étendues 164

— IV. Cartes d'une région étendue 165

CINQUIÈME PARTIE. — **Cartes fragmentées** 175

CHAPITRE I. Cartes étoilées. 176

— II. Cartes en plusieurs feuilles. 178

— III. Cartes polyédriques 180

— IV. Mappemonde en quatorze cartes 181

— V. Mappemonde en douze cartes pentagonales. 187

CONCLUSIONS 210

LISTE DES OUVRAGES CONSULTÉS 213

LES

PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

PRÉLIMINAIRES

§ 1. — Un système de représentation est complètement déterminé quand on peut calculer les coordonnées x, y d'un point de la carte, étant données les coordonnées λ, φ du point correspondant sur le globe.

Une représentation cartographique est donc déterminée par deux équations

$$f_1(x, y, \lambda, \varphi) = 0,$$
$$f_2(x, y, \lambda, \varphi) = 0.$$

§ 2. *Remarque I.* — Étant donné le système cartographique

$$x = \Phi_1(\lambda, \varphi), \quad y = \Phi_2(\lambda, \varphi),$$

on peut, sans modifier les propriétés de la carte, multiplier x et y par un même coefficient constant; en effet, l'introduction de ce coefficient ne fait que changer l'échelle du dessin.

Grâce à cette remarque, nous simplifierons toutes les formules en égalant à l'unité les coefficients communs à x et y.

Nous insistons sur cette remarque, parce que, si évidente qu'elle soit, elle est souvent perdue de vue par les auteurs.

§ 3. *Remarque II.* — Il est des cas où les formules se simplifient en prenant pour coordonnées géographiques, au lieu de φ, la distance polaire z.

De même, il y a parfois avantage à prendre pour coordonnées cartographiques, au lieu de x et y, les coordonnées ρ et θ.

Ainsi qu'en vertu de la remarque I, on peut multiplier x et y par un même coefficient, de même on pourra multiplier ρ par un coefficient quelconque sans modifier les propriétés de la carte.

§ 4. *Remarque III.* — Soit donné un système cartographique

$$f_1(xy\lambda\varphi) = 0, \quad f_2(xy\lambda\varphi) = 0.$$

La terre étant supposée sphérique, nous pouvons établir d'autres cartes ayant les mêmes propriétés, en prenant pour référence des coordonnées sphériques un point quelconque et son cercle d'horizon. Le point choisi jouera le rôle de pôle et le cercle d'horizon remplacera l'équateur; les almicantarats remplaceront les cercles de latitude et les grands cercles perpendiculaires à l'horizon remplaceront les méridiens.

Toutefois, pour ne pas compliquer la terminologie, les lignes définies ci-dessus seront appelées pôle, équateur, méridiens, parallèles *géométriques*.

Grâce à cette remarque, nous pouvons réduire le nombre des systèmes différents et l'étude sera de beaucoup simplifiée.

PREMIÈRE PARTIE

ALTÉRATIONS LOCALES

CHAPITRE PREMIER

Définition des altérations locales.

Échelle linéaire.

§ 5. — Considérons sur la sphère un élément MN dont l'azimut est α. Soient λ, φ les coordonnées géographiques, soient xy les coordonnées cartographiques du point M (fig. 1).

Soient posées les notations

$$dx = p d\lambda + q d\varphi, \quad . \quad . \quad (1)$$
$$dy = p' d\lambda + q' d\varphi \quad . \quad . \quad (2)$$

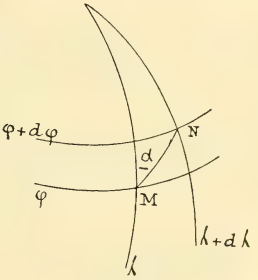


Fig. 1.

Le parallèle de latitude φ est un cercle de rayon $r = R \cos\varphi$, R étant le rayon de la sphère. D'autre part, le triangle rectangle donne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\,.\,d\lambda}{R d\varphi}.$$

L'échelle linéaire de l'élément MN est le rapport m déterminé par

$$m = \frac{\text{longueur carte}}{\text{longueur sphère}},$$

donc

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2 d\varphi^2 [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha]}.$$

Dans la suite, nous ferons $R = 1$; cette simplification est permise parce que nous ne considérons pas la valeur absolue de m, mais seulement le rapport entre ses diverses valeurs.

Remplaçons dx^2 et dy^2 par les notations (1) et (2). Il vient

$$m^2 = \frac{p^2 + p'^2}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \alpha + (q^2 + q'^2) \cos^2 \alpha + 2 \frac{pq + p'q'}{\cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (8)$$

Le long du méridien de M, l'échelle m a une valeur particulière m_m qui se calcule en faisant $\alpha = 0$, il vient

$$m_m^2 = q^2 + q'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Le long du parallèle de M, l'échelle vaut m_p qui se calcule en y faisant $\alpha = 90^\circ$

$$m_p^2 = \frac{p^2 + p'^2}{\cos^2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

La formule (8) devient ainsi :

$$m^2 = m_p^2 \sin^2 \alpha + m_m^2 \cos^2 \alpha + \frac{2(pq + p'q')}{\cos \varphi} \cos \alpha \sin \alpha. \quad (9)$$

§ 6. — Calculons l'échelle pour deux orientements α_3 α_4 rectangulaires entre eux; on vérifie aisément que

$$m_3^2 + m_4^2 = m_m^2 + m_p^2,$$

d'où le théorème I :

Les échelles linéaires suivant les deux côtés d'un angle droit sphérique sont telles que la somme de leurs carrés est indépendante de l'orientement de l'angle droit.

§ 7. — Considérons comme fixe le point λ, φ et faisons varier α, cherchons l'azimut qui donne l'échelle maximum. La formule (9) nous montre qu'il faut chercher le maximum d'une fonction de la forme

$$A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + C \sin \alpha \cos \alpha.$$

Égalant la dérivée à zéro, il vient

$$(A - B) \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{B - A}.$$

L'angle 2α est déterminé à 180° près; l'angle α est déterminé à 90° près. Ainsi il y a deux orientements rectangulaires α_1 et $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$ qui satisfont à la question.

La fonction considérée a pour dérivée seconde

$$(A - B) \cos 2\alpha - C \sin 2\alpha.$$

Si nous introduisons les solutions α_1 et α_2, nous obtenons deux résultats de signes contraires; donc une solution donne l'échelle maximum et l'autre l'échelle minimum.

Nous adoptons, d'après Tissot, la notation a pour l'échelle maximum et b pour l'échelle minimum.

§ 8. — La formule

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{B - A}$$

permet de calculer $\operatorname{tg} \alpha_1$ et $\operatorname{tg} \alpha_2$; on a

$$\frac{C}{B - A} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

d'où

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{C} (B - A) - 1 = 0.$$

La somme des racines est

$$\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2(A - B)}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Le produit des racines est

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \times \operatorname{tg} \alpha_2 = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

La formule (11) nous donne le théorème II :

Les directions qui engendrent les plus grandes altérations d'échelle linéaire forment sur la sphère un angle droit.

§ 9. — Proposons-nous de calculer l'angle formé sur la carte par les lignes qui représentent les deux directions a et b.

Formons le produit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_b;$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p'd\lambda + q'd\varphi}{pd\lambda + q'd\varphi} = \frac{p' \operatorname{tg} \alpha + q' \cos \varphi}{p \operatorname{tg} \alpha + q \cos \varphi}.$$

Le numérateur de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_b$$

a pour valeur

$$(p' \operatorname{tg} \alpha_1 + q' \cos \varphi)(p' \operatorname{tg} \alpha_2 + q' \cos \varphi) = p'^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + q'^2 \cos^2 \varphi + p'q' \cos \varphi . (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Remplaçant par leur valeur $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2$ et $\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2$, il vient

$$-p'^2 + q'^2 \cos^2 \varphi + p'q' \cos^2 \varphi \cdot \frac{1}{pq + p'q'} \left[\frac{p^2 + p'^2}{\cos^2 \varphi} - (q^2 + q'^2)\right].$$

En développant,

$$\frac{1}{pq + p'q'} [pqq'^2 \cos^2 \varphi - q^2 p'q' \cos^2 \varphi - p'^2 pq + p^2 p'q']$$

$$= \frac{1}{(pq + p'q')} \cdot [pp'(pq' - p'q) + qq' \cos^2 \varphi (pq' - p'q)].$$

Le dénominateur s'obtient en intervertissant les accents — on voit qu'il est égal au numérateur changé de signe.

Donc

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_b = -1.$$

D'où le théorème III :

L'angle formé par les directions les plus altérées est représenté sur la carte par un angle droit.

§ 10. — Résumons les théorèmes I, II, III.

Étant fixé sur la sphère le sommet d'un angle droit, la somme

des carrés des échelles suivant ses côtés est indépendante de l'orientement de l'angle droit.

Il est possible d'orienter l'angle droit de manière que sur la carte il soit représenté par un angle droit; alors les côtés de l'angle droit sont les directions de plus grande altération de longueur.

§ **11.** — Dans l'étendue d'une carte, les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire m sont

$$\left\{\begin{array}{l}\text{la plus grande valeur de } a.\\ \text{la plus petite valeur de } b.\end{array}\right\}$$

Ce qu'il importe de considérer, ce ne sont pas ces valeurs, mais seulement leur rapport; nous représentons ce rapport par Δ_m,

$$\Delta_m = \frac{\text{la plus grande valeur de } a}{\text{la plus petite valeur de } b}.$$

Indicatrice.

§ **12.** — Soit sur la sphère un point λ, φ et sur la carte sa représentation x, y. Traçons un cercle de rayon infiniment petit (fig. 2).

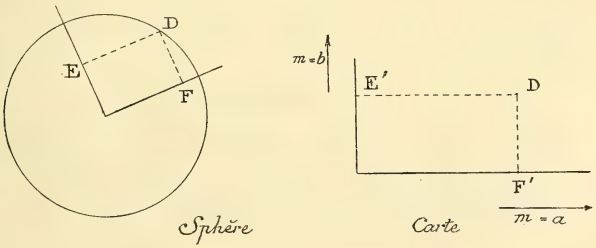


Fig. 2.

Traçons sur la sphère un angle droit et orientons-le de manière que le long de ses côtés l'altération de longueur soit la

plus grande; alors il est représenté sur la carte par un angle droit; l'échelle linéaire suivant ces directions est a et b.

Considérons sur la sphère le point D et les distances DE, DF.

Si l'on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, il vient

$$D'E' = DE \times a.$$
$$D'F' = DF \times b.$$

Donc sur la carte le lieu de D' est une ellipse.

D'où le théorème IV :

Un cercle infiniment petit de la sphère est représenté sur la carte par une ellipse.

Cette ellipse est dénommée « indicatrice ».

Échelle locale de superficie.

§ 13. — L'échelle locale de superficie se définit par

$$S = \frac{\text{surface élémentaire de la carte}}{\text{surface élémentaire de la sphère}}.$$

L'indicatrice représente un cercle de superficie πR^2. L'indicatrice a pour superficie

$$\pi \times Ra \times Rb,$$

d'où

$$S = a \times b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nous donnons plus loin les formules qui permettent de calculer S.

Cartes authaliques.

§ 14. — On appelle cartes authaliques ou équivalentes (en allemand : *Flachentreue*), celles pour lesquelles l'échelle de superficie est la même pour tous les points de la carte.

Cette propriété s'exprime par S = constante.

§ 15. — Nous avons vu que

$$\Delta_m = \frac{\text{la plus grande valeur de } a}{\text{la plus petite valeur de } b}.$$

puisque $ab =$ constante S, c'est au point où a prend sa plus grande valeur que b prend sa plus petite valeur.

Si A est la plus grande valeur de a, la plus petite valeur de b est $\frac{S}{A}$. Donc, pour les cartes authaliques,

$$\Delta_m = \frac{A}{\frac{S}{A}} = \frac{A^2}{S}.$$

Altérations d'angle ou déformation.

§ 16. — Considérons une indicatrice et le cercle qu'elle représente; soit un angle t' compris entre un vecteur A′ D′ et le grand axe de l'indicatrice.

Soit t l'angle de la sphère qu'il représente (fig. 3).

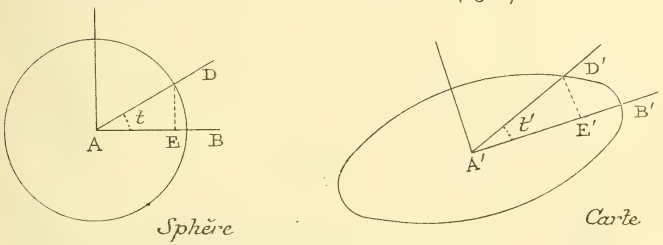


Fig. 3.

$$\operatorname{tg} t = \frac{DE}{AE}. \qquad \operatorname{tg} t' = \frac{D'E'}{A'E'} = \frac{DE \times b}{AE \times a},$$

d'où

$$\operatorname{tg} t' = \operatorname{tg} t \times \frac{b}{a}.$$

Calculons le maximum de $(t - t')$. De la formule ci-dessus on tire

$$\operatorname{tg}(t' - t) = \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{1}{\operatorname{tg} t} + \operatorname{tg} t'}.$$

Le dénominateur est une somme de deux termes dont le produit est constant et égal à $\frac{b}{a}$. Donc il est minimum quand les deux termes sont égaux entre eux.

Soient T et T′ les valeurs de t et t' (fig. 4). Il vient

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} T &= \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{\sqrt{S}} \\ \operatorname{tg} T' &= \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{\sqrt{S}} \\ T + T' &= 90^\circ. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

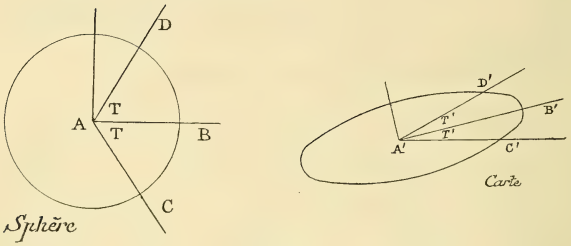


Fig. 4.

§ 17. — Soit A′ D′ le vecteur qui est incliné de l'angle T′ sur le grand axe de l'indicatrice; prenons son symétrique par rapport à A′ B′.

Soit AD le vecteur représenté par A′ D′ et prenons son symétrique par rapport à AB.

L'angle DAC est l'angle de la sphère qui diffère le plus de sa représentation.

C'est cet angle que l'on considère pour évaluer l'altération d'angle. Et l'on prend la notation $\omega = T - T'$. D'où

$$T = 45^\circ + \frac{\omega}{2}.$$

$$T' = 45^\circ - \frac{\omega}{2}.$$

$$2 \operatorname{tg} \omega = \frac{a - b}{\sqrt{ab}} = \operatorname{tg} T - \operatorname{cotg} T. \quad (17)$$

§ 18. — Dans les cartes authaliques $ab = S =$ constante. Or

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a^2}{S},$$

donc dans l'étendue d'une carte, c'est au point où a est maximum que la déformation est maximum.

Donc la déformation maximum est donnée par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{A^2}{S}.$$

Nous avons trouvé

$$\Delta_m = \frac{A^2}{S}.$$

Donc pour les cartes authaliques,

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T_m.$$

§ 19. *Remarque.* — Si en divers points d'une carte les indicatrices sont semblables, l'altération d'angle est la même en ces points.

En effet, tg T ne dépend pas de la valeur absolue de a et b, mais seulement de leur rapport.

Cartes orthomorphes.

§ 20. — Nous appellerons cartes orthomorphes (ou autogonales, ou conformes, en allemand : *Winkeltreue*) celles où l'indicatrice est circulaire en tous les points de la carte.

Donc en chaque point $a = b$.

Propriétés. — Les formules (16) et (17) donnent, à cause de $a = b$,

$$\operatorname{tg} T = 1, \qquad T = 45°,$$
$$\operatorname{tg} \omega = 0, \qquad \omega = 0.$$

Donc en chaque point d'une carte orthomorphe l'altération d'angle est nulle.

De ce que $a = b$, on a $S = a^2$, donc $\Delta_s = (\Delta_m)^2$.

§ 21. — Si l'on considère un point d'une carte, il suffit de connaître a et b en ce point pour en déduire les trois altérations : altération d'angle, altération d'échelle linéaire, altération d'échelle de superficie.

Si l'on considère une carte dans toute son étendue, les altérations sont connues quand on connaît a et b en chaque point.

C'est la méthode suivie par Tissot; cet auteur propose de dessiner l'indicatrice en divers points de la carte, afin de rendre plus tangible la variation de ces altérations.

Ce qu'il importe de considérer, c'est la variation de l'altération.

La déformation sera caractérisée par T_m (ou ω).

Pour les deux autres altérations, nous proposons les caractéristiques Δ_m et Δ_s.

Ainsi les variations seront évaluées en nombre et la comparaison des divers systèmes sera plus aisée.

Cartes orthomorphes. — L'altération d'angle est nulle; il suffit donc de considérer Δ_m et Δ_s. Mais pour ces cartes $\Delta_s = \Delta_m^2$.

Donc les propriétés des cartes orthomorphes sont définies par une seule caractéristique.

Cartes authaliques. — L'altération d'échelle de superficie est nulle; il suffit donc de considérer T_m et Δ_m.

Mais pour ces cartes $\Delta_m = tg^2 T_m$. Donc les propriétés des cartes authaliques sont définies par une seule caractéristique Δ_m.

Classification des systèmes de représentation.

§ 22. — Les auteurs ne sont pas d'accord sur le nom à donner aux divers modes de représentation. Certains les dénomment par leurs propriétés : orthomorphe, authalique, etc.

D'autres les dénomment par la figure que présente le réseau des méridiens et parallèles géographiques : orthogonal, équidistant, sinusoïdal, etc.

D'autres les désignent par le nom de l'inventeur; mais il est des systèmes revendiqués par plusieurs inventeurs et il est des cartographes ayant inventé plusieurs systèmes.

Dans le cours de cette étude, les systèmes seront désignés par un numéro d'ordre.

Classification :

Tissot forme trois groupes d'après les altérations locales : 1° systèmes authaliques; 2° systèmes orthomorphes; 3° les autres.

Zöppritz forme deux groupes : 1° systèmes définis par une formule simple; 2° les autres.

Nous pensons que pour la présente étude il convient de classer les systèmes d'après la *forme des équations* qui les définissent.

Nous avons formé sept classes rassemblées en deux groupes ainsi qu'il suit :

Imaginons, tracé sur la sphère, un réseau de méridiens géométriques distants angulairement d'un angle constant, 10 degrés par exemple; la surface sphérique est ainsi partagée en 36 fuseaux.

Dans le premier groupe nous rangeons les systèmes où les 36 fuseaux sont représentés par le même dessin.

Dans le second groupe ceux où chacun des fuseaux a un dessin différent.

Généralités sur les systèmes du premier groupe.

§ **23.** — La symétrie exige que les méridiens qui délimitent les fuseaux soient rectilignes et convergents; ils font entre eux un angle constant égal à $10° \times n$.

La symétrie exige aussi que les parallèles soient représentés par des cercles concentriques ayant pour centre le point de convergence des méridiens.

Par raison de symétrie, les axes de l'indicatrice sont en chaque point orientés suivant le parallèle et le méridien; donc pour connaître les valeurs extrêmes de a et b, il suffit de connaître les valeurs extrêmes de m_m et m_p.

Cas limites :

1° Cartes azimutales $n = 1$. L'angle des méridiens est représenté en vraie grandeur; le pôle est un centre de symétrie;

2° Cartes cylindriques $n = 0$. Les méridiens sont des droites parallèles et des équidistantes. Les parallèles sont représentés par des droites perpendiculaires aux méridiens.

Nous étudierons d'abord les systèmes correspondant à ces deux cas limites.

CHAPITRE II

Première classe. — Cartes cylindriques.

Formules générales.

§ 24. — Pour les systèmes de la première classe, il convient de prendre pour axes de coordonnées l'équateur et le nul méridien. Les équations du système sont

$$x = \lambda$$
$$y = f(\varphi).$$

Les dérivées caractéristiques sont

$$p = \frac{dx}{d\lambda} = 1, \qquad q = \frac{dx}{d\varphi} = 0,$$

$$p' = \frac{dy}{d\lambda} = 0, \qquad q' = \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi.)$$

$$m_m = \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi), \qquad m_p = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Carte orthomorphe I_1.

§ 25. — Parmi les cartes de la première classe, quelles sont les cartes orthomorphes?

La condition de l'orthomorphie est $m_m = m_p$ ou

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

d'où

$$y = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \text{c}^{\text{te}}.$$

La constante est nulle, afin que $y = 0$, pour $\varphi = 0$.
Les équations du système sont donc

$$x = \lambda$$
$$y = \log_{nep} \operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Propriétés :

$$a = m = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Dans une carte représentant la région comprise entre les latitudes $+\varphi$ et $-\varphi$, m varie de 1 à $\frac{1}{\cos \varphi}$.
Donc

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos \varphi} \qquad \Delta_s = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Exemple : Pour une carte représentant la zone comprise entre les latitudes $+ 60°$ et $- 60°$,

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos 60°} = 2, \qquad \Delta_s = 4.$$

Dénomination : Quand on prend pour plan de référence l'équateur géographique, le système est dénommé : projection des cartes marines de Mercator.

Cartes authaliques I_2.

§ 26. — Parmi les cartes de la première classe, quelles sont les cartes authaliques ?
La condition de l'équivalence est $m_m\, m_p = c^{te} = S$, ou

$$\frac{dy}{d\varphi} = S \cos \varphi,$$

d'où

$$y = S \sin \varphi + c^{te}.$$

La constante d'intégration est nulle afin que y s'annule pour $\varphi = 0$.

Les équations du système sont donc

$$x = \lambda$$
$$y = S \sin \varphi.$$

Et l'on voit que les conditions : équivalence et première classe, déterminent le problème sauf le paramètre arbitraire S.

Nous verrons plus loin qu'il convient de prendre $S > 1$.

§ 27. *Cas particulier :* $S = 1$. — C'est la projection cylindrique de Lambert :

$$x = \lambda$$
$$y = \sin \varphi.$$

$$\left.\begin{aligned} m_m &= \cos \varphi \\ m_p &= \frac{1}{\cos \varphi} \end{aligned}\right\} \quad m_p > m_m.$$

Donc l'indicatrice est toujours allongée suivant les parallèles.

L'indicatrice est circulaire pour tous les points de l'équateur.

Pour une carte représentant la zone comprise entre les latitudes $+\varphi$ et $-\varphi$,

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Exemple : Pour la zone comprise entre les latitudes $+60°$ et $-60°$,

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \Delta_m = 4, \quad \omega = 37°.$$

§ 28. — Reprenons le *cas général* $x = \lambda$, $y = S \sin \varphi$, $S > 1$.

C'est la carte cylindrique d'Albers.

Propriétés :

$$m_m = S \cos \varphi, \quad m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$

à l'équateur, $m_m = S$, $m_p = 1$, donc $m_m > m_p$; l'indicatrice est allongée suivant les méridiens.

Indicatrice circulaire : L'indicatrice est circulaire pour tous les points de latitude φ_s déterminée par $(m_m)_s = (m_p)_s$ ou

$$S \cos \varphi_s = \frac{1}{\cos \varphi_s}, \quad \text{d'où} \quad \cos^2 \varphi_s = \frac{1}{S}.$$

§ 29. — Cherchons à quelle latitude le grand axe de l'indicatrice a une valeur donnée K.

Une solution est donnée par $m_m = K$; une autre solution est donnée par $m_p = K$.

Soient φ_3 et φ_4 ces deux solutions.

$$(m_m)_3 = K, \quad (m_m)_3 = S \cos \varphi_3, \quad \cos \varphi_3 = \frac{K}{S},$$

$$(m_p)_3 = K, \quad (m_p)_4 = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \cos \varphi_4 = \frac{1}{K}.$$

En (3) l'indicatrice est allongée suivant le méridien.

En (4) l'indicatrice est allongée suivant le parallèle.

La solution (4) existe toujours; la solution (3) n'existe que pour $K < S$.

Nous proposons d'appeler latitudes conjuguées celles où l'altération est la même.

Les latitudes conjuguées φ_3 φ_4 sont liées par l'équation :

$$\cos \varphi_3 \times \cos \varphi_4 = \frac{1}{K} \times \frac{K}{S} = \frac{1}{S}.$$

Remarques : I. La latitude conjuguée de l'équateur est φ_1 déterminée par

$$\cos 0 \times \cos \varphi_1 = \frac{1}{S}, \quad \text{d'où} \quad \cos \varphi_1 = \frac{1}{S}.$$

II. La latitude φ_5 où l'indicatrice est circulaire est sa propre conjuguée. Elle est définie par

$$\cos \varphi_5 \times \cos \varphi_5 = \frac{1}{S}.$$

III. Les latitudes supérieures à φ_1 n'ont pas de conjuguée.

Altérations maximum.

§ 30. — Pour une carte représentant la zone comprise entre les latitudes $+\varphi_1$ et $-\varphi_1$, les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire sont dans le rapport

$$\Delta_m = \frac{A^2}{S} = \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \times \cos \varphi_1 = \frac{1}{\cos \varphi_1}.$$

Exemple : Soit

$$\varphi_1 = 60°, \qquad \Delta_m = \operatorname{tg}^2 T_m = 2, \qquad \omega = 19° 30'.$$

Carte carrée : $x = \lambda$, $y = \varphi$. — En allemand : *quadratische Plattkarte* I_3.

§ 31. — Propriétés :

$$m_m = 1, \quad m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$

d'où $m_p > m_m$. L'indicatrice est toujours allongée suivant les parallèles.

L'indicatrice n'est circulaire que pour l'équateur

$$S = m_m m_p = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 T = \frac{m_p}{m_m} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Pour une zone comprise entre les latitudes $+ \varphi$ et $- \varphi$, le rapport entre les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire est

$$\Delta_m = \frac{(m_p)_\varphi}{1} = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \Delta_s = \Delta_m = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Exemple : Pour la zone comprise entre les latitudes $+ 60°$ et $- 60°$

$$\Delta_m = 2, \quad \Delta_s = 2, \quad \operatorname{tg}^2 T_m = 2, \quad \omega = 19°30'.$$

Carte parallélogramme I_3 : $x = \lambda$, $y = n \varphi$, $n > 1$.

§ 32. — Propriétés :

$$m_m = n, \quad m_p = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad S = \frac{n}{\cos \varphi};$$

donc S croît à mesure que φ croît.

A l'équateur $m_m = n \quad m_p = 1$, donc $m_m > m_p$. L'indicatrice est allongée suivant le méridien.

L'indicatrice est circulaire pour les points de latitude φ_5 déterminée par $(m_m)_5 = (m_p)_5$ ou

$$n = \frac{1}{\cos \varphi_5}, \quad \text{d'où} \quad \cos \varphi_5 = \frac{1}{n}.$$

Pour les latitudes supérieures à φ_3,

$$\cos\varphi < \frac{1}{n}.$$

donc $m_p > m_m$, donc l'indicatrice est allongée suivant le parallèle.

Altération d'angle : $\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b}$, donc

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{m_m}{m_p} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2 T = \frac{m_p}{m_m}.$$

Donc pour une valeur donnée de T il y a deux valeurs de φ, soient φ_4 et φ_5 ces deux latitudes conjuguées.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 T &= \left(\frac{m_p}{m_m}\right)_5 = \frac{1}{n\cos\varphi_5} \\ \operatorname{tg}^2 T &= \left(\frac{m_m}{m_p}\right)_4 = n\cos\varphi_4 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{n\cos\varphi_5} = n\cos\varphi_4,$$

d'où

$$\cos\varphi_5 \cos\varphi_4 = \frac{1}{n^2}.$$

La latitude conjuguée de l'équateur est φ_1, déterminée par

$$\cos\varphi_1 \times \cos 0 = \frac{1}{n^2}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{1}{n^2}.$$

La latitude φ_3, où l'indicatrice est circulaire, est sa propre conjuguée.

Pour la zone comprise entre les latitudes $+\varphi_1$ et $-\varphi_1$, le maximum de T est donné par $\operatorname{tg}^2 T_0 = \operatorname{tg}^2 T_1 =$

$$\left(\frac{m_p}{m_m}\right)_1 = \frac{1}{n\cos\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{\cos\varphi_1}}.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire sont

$$(m_p)_0 = 1, \quad \text{et} \quad (m_p)_1 = \frac{1}{\cos\varphi_1}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_m = \frac{1}{\cos\varphi_1}.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle de superficie sont

$$S_0 = n, \quad S_1 = \frac{n}{\cos \varphi_1}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_s = \frac{1}{\cos \varphi_1}.$$

Exemple : Pour la zone comprise entre les latitudes + 60° et — 60°,

$$\Delta_m = 2, \quad \Delta_s = 2, \quad \operatorname{tg}^2 T_m = 1.414, \quad \omega = 9°50'.$$

Carte perspective épicylindrique I_4 :

$$x = \lambda, \quad y = \operatorname{tg} \varphi.$$

§ 33. — Propriétés :

$$m_p = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad m_m = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi};$$

donc $m_m > m_p > 1$. L'indicatrice a toujours le grand axe perpendiculaire à l'équateur

$$S = m_m m_p = \frac{1}{\cos^3 \varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{m_m}{m_p} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \times \frac{\cos \varphi}{1} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Pour la zone comprise entre les latitudes + φ et — φ, le maximum de T est donné par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire sont

$$(m_m)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (m_m)_\varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_m = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle de superficie sont

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad S_\varphi = \frac{1}{\cos^3 \varphi}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_s = \frac{1}{\cos^3 \varphi}.$$

Exemple : Pour la zone comprise entre les latitudes + 60° et — 60°,

$$\Delta_m = 4, \quad \Delta_s = 8, \quad \operatorname{tg}^2 T = 2, \quad \omega = 19°30'.$$

N. B. — Les caractéristiques des cartes cylindriques ont été groupées en un tableau annexe (tableau *A*).

CHAPITRE III

Deuxième classe. — Cartes azimutales

$$\theta = \lambda, \qquad \rho = f(z), \qquad \rho_0 = 0.$$

§ 34. Généralités. — Par raison de symétrie, l'indicatrice est circulaire pour le pôle; nous donnerons à ρ un coefficient tel qu'au pôle l'indicatrice ait pour rayon l'unité. Ainsi toutes les cartes étudiées seront identiques au centre.

Il convient de prendre pour coordonnées sphériques λ et z et pour coordonnées cartographiques θ et ρ.

Nous pouvons calculer directement les éléments des altérations locales. On a d'abord

$$m_m = \frac{d\rho}{dz}.$$

Pour calculer m_p, considérons que le cercle de latitude a pour longueur sur la carte $2\pi\rho$ et sur le globe $2\pi \sin z$, d'où

$$m_p = \frac{\rho}{\sin z}.$$

Notation. — Pour simplifier les formules, nous ferons parfois usage de la notation $\xi = \frac{1}{2} z$.

Carte orthomorphe II_1.

§ 35. — La condition de l'orthomorphie est $m_m = m_p$, d'où

$$\frac{\rho}{\sin z} = \frac{d\rho}{dz}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = c^{te} \times \operatorname{tg} \frac{1}{2} z.$$

$$\frac{d\rho}{dz} = c^{te} \times \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} z}.$$

Nous choisissons la constante telle que l'indicatrice ait au centre un rayon égal à l'unité, d'où constante $= 2$.

L'équation est

$$\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 2 \operatorname{tg} \xi.$$

C'est la projection stéréographique.

Propriétés :

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

Pour une calotte sphérique d'amplitude $z^\circ = 2\xi$, les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire sont

$$m_o = 1 \text{ et } m_\xi = \frac{1}{\cos^2 \xi}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_m = \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

Exemple : Pour une calotte de 60°, $\xi = 30^\circ$, $\Delta_m = 1.333$, $\Delta_s = 1.78$.

Carte authalique II_2.

§ 36. — L'échelle linéaire au centre doit être égale à l'unité; donc $S = 1$.

La condition de l'authalisme s'exprime donc par $m_m \times m_p = 1$.

Par les formules (26), il vient

$$\frac{\rho d\rho}{\sin z dz} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho^2 = c^{te} - 2 \cos z.$$

La constante se calcule par la condition $\rho = o$ pour $z = o$, d'où

$$\rho^2 = 2 - 2 \cos z = 4 \sin^2 \frac{1}{2} z, \qquad \rho = 2 \sin \frac{1}{2} z = 2 \sin \xi.$$

Propriétés :

$$m_m = \frac{d\rho}{dz} = \cos \xi, \qquad m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{1}{\cos \xi}.$$

$m_m < m_p$. L'indicatrice est toujours allongée suivant le parallèle.

$m_p = a \qquad m_m = b.$

$$\operatorname{tg}^2 \mathrm{T} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

T croît à mesure que ξ croît.

Pour une calotte sphérique d'amplitude z^o, le maximum de T se calcule par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

Exemple : Pour une calotte d'amplitude 60°, $z = 60^o$, $\xi = 30^o$,

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = 1{,}333, \qquad \omega = 8^o\,15'.$$

Carte de Postel II_3. $\rho = z$.

§ 37. — Propriétés :

$$m_m = \frac{d\rho}{dz} = 1, \qquad m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{z}{\sin z}, \quad \text{donc} \quad m_p > 1.$$

L'indicatrice est toujours allongée suivant le parallèle

$$a = \frac{z}{\sin z} \qquad b = 1.$$

$$S = ab = \frac{z}{\sin z}.$$

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{z}{\sin z}.$$

Pour une calotte d'amplitude z^o, le maximum de T est donné par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{z}{\sin z}.$$

Les valeurs extrêmes de m sont

$$1 \text{ et } \frac{z}{\sin z}, \qquad \text{d'où} \quad \Delta_m = \frac{z}{\sin z};$$

de même

$$\Delta_s = \frac{z}{\sin z}.$$

Exemple : Pour une calotte $z = 60^o$,

$$\operatorname{tg}^2 T = \Delta_m = \Delta_s = 1.21. \qquad \omega = 5^o30'.$$

Projection orthographique II_4. $\rho = \sin z$.

§ 38. — Propriétés :

$$m_m = \frac{d\rho}{dz} = \cos z, \qquad m_p = \frac{\rho}{\sin z} = 1,$$

d'où

$$m_p > m_m, \qquad a = m_p, \qquad b = m_m.$$

L'indicatrice est toujours allongée suivant le parallèle

$$S = ab = \cos z, \qquad \operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos z}.$$

Pour une calotte d'amplitude z^0, le maximum de T se calcule par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos z}.$$

Les valeurs extrêmes de m sont $(m_m)_o = 1$ et $(m_m)_z = \cos z$,

d'où

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos z}.$$

De même les valeurs extrêmes de S sont S_o et S_z,

$$\Delta_s = \frac{1}{\cos z},$$

Exemple : Pour une calotte $z = 60^0$,

$$\Delta_m = \Delta_s = \operatorname{tg}^2 T = 2, \qquad \omega = 19^0\ 30'.$$

Projection gnomonique II_6. $\rho = \operatorname{tg} z$.

§ 39. — Propriétés :

$$m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{1}{\cos z}, \quad m_m = \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad m_m > m_p,$$

d'où

$$a = m_m = \frac{1}{\cos^2 z}, \; b = m_p = \frac{1}{\cos z}.$$

L'indicatrice a le grand axe dirigé suivant le méridien

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos z}.$$

Pour une calotte d'amplitude z^o, le maximum de T se calcule par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos z}.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle linéaire sont

$$a_o = 1 \text{ et } a_z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_m = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Les valeurs extrêmes de S sont S_o et S_z,

$$S = \frac{1}{\cos^3 z}, \qquad \Delta_s = \frac{1}{\cos^3 z}.$$

Exemple : Pour une calotte $z = 60^o$,

$$\operatorname{tg}^2 T = 2, \qquad \omega = 19^o\,50', \qquad \Delta_m = 4, \qquad \Delta_s = 8.$$

§ 40. Propriété remarquable. — Sur une sphère, en prenant pour coordonnées λ et z, l'orthodromie a pour équation $\cos\lambda \times \operatorname{tg} z =$ constante. Sur la carte gnomonique, elle a pour équation $\cos\theta \times \rho =$ constante. C'est l'équation d'une droite. Donc sur une carte gnomonique, les orthodromies sont représentées par des droites.

Carte de Breusing II_8 ;
en allemand : *vermittelnde azimuthale Projection*

$$\rho = 2\frac{\sin\xi}{\sqrt{\cos\xi}}.$$

§ 41. — Breusing a choisi un système en prenant pour ρ la moyenne géométrique entre la fonction qui définit la projection authalique et celle qui définit la projection orthomorphe, d'où

$$\rho^2 = 2\operatorname{tg}\xi \times 2\sin\xi.$$

Nous ignorons ce qui justifie ce choix plutôt qu'un autre (comme, par exemple, la moyenne arithmétique).

PROPRIÉTÉS :

$$m_m = \frac{d\rho}{dz} = \frac{1 + \cos^2\xi}{2} \cdot \frac{1}{(\cos\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{1}{(\cos\xi)^{\frac{3}{2}}}, \quad m_p > m_m, \quad \text{car } 1 + \cos^2\xi < 2.$$

D'où $a = m_p \qquad b = m_m.$

$$S = m_m m_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2\xi}{(\cos\xi)^3}.$$

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{m_p}{m_m} = \frac{2}{1 + \cos^2\xi}.$$

T augmente à mesure que ξ croît.

Pour une calotte d'amplitude $z^0 = 2\xi$, le maximum de T se calcule par

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{2}{1 + \cos^2\xi}.$$

Les valeurs extrêmes de m sont

$$(m_p)_o \text{ et } (m_p)_\xi, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_m = \frac{1}{(\cos\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

De même les valeurs extrêmes de S sont

$$S_o \text{ et } S_\xi, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2\xi}{(\cos\xi)^3}.$$

EXEMPLE : Pour une calotte d'amplitude $60^0 = z$, $\xi = 30^0$,

$$\operatorname{tg}^2 T = 1.141 \qquad \omega = 3^0\,50'.$$
$$\Delta_m = 1.238 \qquad \Delta_s = 1.345.$$

Carte « with balance of errors » de Airy Π_7.

§ 42. — Airy se propose de faire une carte azimutale d'une calotte sphérique d'amplitude β^0. Il calcule la somme des carrés des altérations d'angle et de superficie. Mais ces altérations ont une mesure différente; donc la manière de les évaluer pour les

additionner est tout arbitraire. Airy arrive à considérer comme altération la quantité

$$(m_p - 1)^2 + (m_m - 1)^2 = \eta.$$

Cette altération, exprimée en fonction de z, affecte la zone élémentaire de superficie $\sin z\, dz$.

Airy s'impose de rendre minimum l'intégrale depuis le centre jusqu'à la périphérie, de la différentielle $\eta \times \sin z\, dz$.

De ce que

$$m_m = \frac{d\rho}{dz}, \quad m_p = \frac{\rho}{\sin z},$$

cette intégrale est

$$\int_{z=0}^{z=\beta} \sin z\, dz \left[\left(\frac{d\rho}{dz} - 1 \right)^2 + \left[\frac{\rho}{\sin z} - 1 \right]^2 \right],$$

d'où

$$\rho = \frac{-2}{\operatorname{tg} \xi} \log \cos \xi + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta} \operatorname{tg} \xi \log \sec^2 \tfrac{1}{2} \beta,$$

à la bordure de la carte

$$\rho = \rho_\beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta} \log \cos \frac{\beta}{2}.$$

Cas particulier. — Si l'on veut dresser la carte d'un hémisphère, $\beta = 90°$ et le système est défini par

$$\rho = \operatorname{tg} \xi + \frac{1}{\operatorname{tg} \xi} \cdot 2 \log \sec \xi.$$

N. B. Les caractéristiques des cartes azimutales figurent au tableau *A*.

CHAPITRE IV

Troisième classe. — Projections perspectives.

§ 43. — Nous avons formé une classe spéciale des cartes perspectives, quoiqu'elles soient seulement un cas particulier des cartes azimutales.

Dans tous les systèmes étudiés par les auteurs, le tableau est perpendiculaire au diamètre de la sphère passant par le point de vue.

Nous placerons le tableau tangent à la sphère.

Les projections perspectives sont de la forme $\theta = \lambda$, $\rho = f(z)$, $\rho_0 = 0$. Calculons $f(z)$.

Soit M le point de tangence du tableau; soit V le point de vue. Le point K de la sphère se projette en P. Il faut calculer $MP = \rho$, sachant que $MCK = z$ (fig. 5).

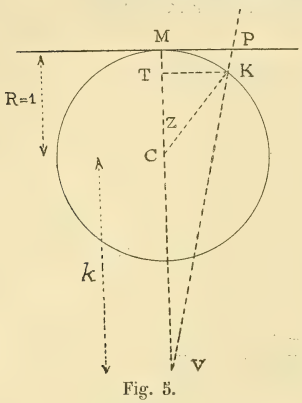


Fig. 5.

La parallèle TK donne

$$\frac{MP}{TK} = \frac{MV}{TV},$$

$$TK = \sin z,$$

$$MV = k + 1,$$

$$TV = k + \cos z,$$

d'où

$$\rho = \sin z \frac{k+1}{k+\cos z}.$$

Cas particuliers :

I. $k = 0$, $\rho = \operatorname{tg} z$, projection gnomonique II_6.

II. $k = 1$, $\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}$, » orthomorphe II_1.

III. $k = \infty$, $\rho = \sin z$, » orthographique II_4.

Limites de l'emploi des cartes perspectives.

§ **44.** — Pour toutes les projections étudiées, k est positif, c'est-à-dire que le point de vue n'est jamais entre le tableau et le centre de la sphère.

Premier cas, $k < 1$. — Le point de vue est à l'intérieur du globe. La carte ne peut s'étendre au delà du point B, déterminé par la parallèle VB; sinon, le point C, par exemple, aura sa pro-

jection confondue avec celle de C′ (fig. 6). Donc la valeur maximum de z est déterminée par $\cos z = -\mathrm{VA} = -k$.

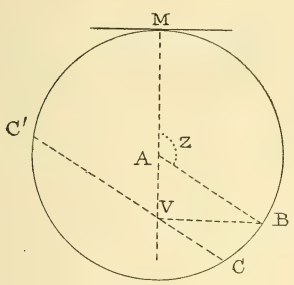


Fig. 6.

Second cas, k > 1. — Le point de vue est à l'extérieur du globe. La carte ne peut s'étendre au delà de B, déterminé par la tangente VB, sinon le point C, par exemple, aurait sa projection confondue avec celle de C′ (fig. 7). La valeur maximum de z est déterminée par

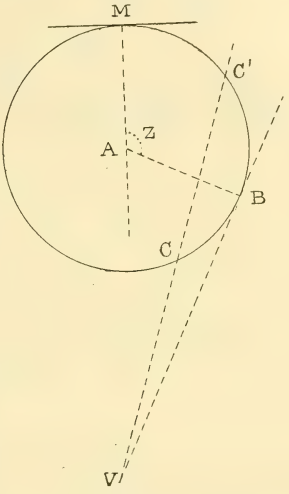


Fig. 7.

$$\cos z = -\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AV}} = -\frac{1}{k}.$$

Cas limite, k = 1. — Le point de vue est sur la sphère, $z_{max} = 180°$ (carte stéréographique).

§ 45. — *Formules fondamentales :*

$$\rho = \sin z \frac{k + 1}{k + \cos z}.$$

Dans tous les systèmes étudiés, $k > 1$.

$$m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{k + 1}{k + \cos z},$$

donc $m_p > 1$.

$$m_m = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{(k+1)(1+k\cos z)}{(k+\cos z)^2},$$

ou

$$m_m = m_p \times \frac{1+k\cos z}{k+\cos z}.$$

Cette fraction est < 1, car de $(k-1)\cos z < k-1$ on tire $k\cos z + 1 < k + \cos z$.

Donc

$$m_m < m_p, \quad m_m = b, \quad m_p = a.$$

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{m_p}{m_m} = \frac{k+\cos z}{1+k\cos z},$$

$$S = m_m \times m_p = \frac{(k+1)^2}{(k+\cos z)^3}(1+k\cos z).$$

Valeurs particulières : au pôle

$$m_m = m_p = 1, \quad S = 1, \quad \rho = 0, \quad \operatorname{tg}^2 T = 1;$$

à l'équateur

$$\rho = \frac{k+1}{k}, \quad m_p = \frac{k+1}{k}, \quad m_m = \frac{k+1}{k^2}, \quad \operatorname{tg}^2 T = k, \quad S = \frac{(k+1)^2}{k^3}.$$

§ 46. *Problème I.* — A quelle latitude $m_p = 1$?

La solution est donnée par $k + 1 = k + \cos z$, d'où $z = 0$; m_p n'est égal à 1 qu'au pôle.

§ 47. *Problème II.* — A quelle latitude $m_m = 1$?

Il faut résoudre l'équation $(k+1)(1+k\cos z) = (k+\cos z)^2$.

Il y a deux racines. L'une est $\cos z = 1$, $z = 0$. Après avoir éliminé cette racine, l'équation est ramenée au 1er degré; la deuxième racine est $\cos z = k^2 - (k+1)$.

Exemples :

$k = 1$	$\cos z = -1$	$z = 180°$
$k = 1.5$	-0.25	$104°30'$
1.75	0.25	$70°$
2	1	$0°$

§ 48. — Quelle est la valeur de k qui donne $z = 90°$?

Il faut résoudre

$$k^2 - (k + 1) = 0, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1.618;$$

c'est la carte III_2.

Cette carte est exposée par Germain.

§ 49. *Problème III.* — A quelle latitude l'indicatrice est-elle circulaire?

Il faut résoudre l'équation $m_m = m_p$, ou

$$1 + k\cos z = k + \cos z, \quad \text{d'où} \quad \cos z = \frac{k-1}{k-1}; \quad z = 0,$$

sauf si $k = 1$, alors $\cos z = \frac{0}{0}$; l'indicatrice est circulaire en tous les points de la carte; c'est la carte orthomorphe II_1.

§ 50. *Problème IV.* — A quelle latitude l'échelle de superficie est-elle la même qu'au pôle?

La solution est donnée par $S = 1$ ou

$$(k + \cos z)^3 = (k + 1)^2 (1 + k\cos z);$$

après avoir écarté la solution $\cos z = 1$, l'équation est ramenée au second degré,

$$\cos^2 z + \cos z\,(1 + 3k) + k^2 - k^3 + 2k + 1 = 0,$$

d'où

$$2\cos z = -(1 + 3k) \pm \sqrt{4k^3 + 5k^2 - 2k + 3}.$$

Ainsi il est impossible de choisir k de manière que $\cos z = \frac{0}{0}$, autrement dit, il est impossible de placer le point de vue de manière que la projection soit authalique.

Exemple :

$$k = 2, \qquad \cos z = -0.1459, \qquad z = 108°20',$$
$$k = 2.5, \qquad 0.375, \qquad z = 68°.$$

Si l'on veut que $S = 1$ à l'équateur, il faut résoudre l'équation

$$k^3 = (k + 1)^2, \qquad \text{d'où} \qquad k = 2.15;$$

c'est la carte III_6.

§ 51. *Problème V.* — A quelle latitude a lieu le maximum de m_m?

La solution est donnée par

$$\frac{\partial m_m}{\partial z} = 0, \quad \text{ou} \quad \cos z_1 = \frac{k^2 - 2}{k};$$

alors la valeur maximum de m_m est

$$(m_m)_{\max.} = \frac{k^2}{4(k^2 - 1)}.$$

Exemple I : m_m est maximum au pôle, $\cos z_1 = 1$; d'où

$$\frac{k^2 - 2}{k} = 1, \quad \underline{k = 2}, \quad (m_m)_{\max.} = 1;$$

c'est la carte III_5.

Exemple II : m_m est maximum à l'équateur, $\cos z_1 = 0$; d'où

$$k^2 = 2, \quad \underline{k = \sqrt{2}}, \quad (m_m)_{\max.} = 1.205;$$

c'est la carte III_4.

Projection de La Hire.

§ 52. — La condition que s'impose La Hire est

$$\rho_{45°} = \frac{1}{2}\rho_{90°},$$

ou

$$0.707 \cdot \frac{k + 1}{k + 0.707} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k + 1}{k}, \quad \text{d'où} \quad \underline{k = 1\,707} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

c'est la carte III_1.

Projection de Parent.

§ 53. — L'auteur propose que le maximum de m_m diffère aussi peu que possible de la moyenne arithmétique entre $(m_m)_0$ et $(m_m)_{90}$.

$$(m_m)_{\max.} = \frac{1}{(k - 1)} \cdot \frac{k^2}{4}, \quad (m_m)_0 = 1, \quad (m_m)_{90} = \frac{k^2 + 1}{k^2}.$$

Il faut donc rendre maximum l'expression

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{k-1}{k^2}\right]-\frac{1}{4}\cdot\frac{k^2}{k-1}.$$

La dérivée égalée à zéro donne

$$0=k^5-2k^4+2k^3-6k+4=0,$$

d'où $k=1.595$; c'est la carte III_3.

§ 54. Conclusions. — Les cartes perspectives ne jouissent d'aucune propriété remarquable, sauf pour les cas particuliers étudiés au groupe des projections azimutales.

Aucune carte perspective n'est authalique.

CHAPITRE V

Projections intermédiaires.

§ **55.** — Si l'on n'a en vue que les altérations locales, on peut être amené à chercher une carte ayant les propriétés intermédiaires entre celles de la carte orthomorphe et celles de la carte authalique.

Par exemple, consentir à une certaine altération d'angle afin que l'altération de superficie soit plus petite que pour la carte orthomorphe.

Ou bien consentir à une certaine altération de superficie, afin que l'altération d'angle soit plus petite que pour la carte authalique.

Le problème est ainsi bien posé : on consent à perdre un avantage afin de diminuer un désavantage.

Certains auteurs ont cherché à ce que le gain *compensât* la perte; mais nous n'avons trouvé nulle part une formule exacte de cette compensation.

Nous exposerons deux familles de cartes intermédiaires :

1° Les cartes cosinus;

2° Les cartes sinus et les cartes tangentes.

Carte cosinus Π_{10}.

§ **56.** — Nous nous proposons d'étudier une famille de cartes ayant pour équation

$$\rho = \frac{2 \sin \xi}{(\cos \xi)^k},$$

où le paramètre k peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et 0.

$k = 0$	$\rho = 2 \sin \xi$	carte authalique.
$k = 0{,}5$	$\rho = \frac{2 \sin \xi}{(\cos \xi)^{\frac{1}{2}}}$	» de Breusing.
$k = 1$	$\rho = 2 \operatorname{tg} \xi$	» orthomorphe (stéréographique).

Ainsi, en faisant varier k, ρ prend toutes les valeurs comprises entre sin ξ et tangente ξ ; il faut démontrer que les caractéristiques S, a, b, T prennent aussi des valeurs intermédiaires entre celles de la carte authalique et celles de la carte orthomorphe.

Les dérivées sont

$$m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{1}{(\cos \xi)^{k+1}}, \qquad m_m = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}{(\cos \xi)^{k+1}},$$

$$\frac{m_m}{m_p} = \cos^2 \xi + k \sin^2 \xi,$$

cette quantité est toujours plus petite que l'unité ; donc $m_m < m_p$ et $m_p = a$, $m_m = b$.

§ 57. — *Échelle de superficie :*

$$S = ab = \frac{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}{(\cos^2 \xi)^{k+1}},$$

k étant fixe, S croît à mesure qu'on s'éloigne du centre ; on le vérifie en constatant que $\frac{dS}{d\xi}$ a toujours le même signe.

Or, au centre, $S = 1$, donc

$$\Delta_s = S = \frac{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}{(\cos \xi)^{k+1}}.$$

Si l'on fixe ξ et si l'on fait varier k, Δ_s croît constamment; il est donc intermédiaire entre Δ_s de la carte authalique et Δ_s de la carte orthomorphe,

$$\text{pour } k = 0, \quad \Delta_s = 1; \qquad \text{pour } k = 1, \quad \Delta_s = \frac{1}{\cos^4 \xi}.$$

Déformation :

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi} = \frac{1}{k + (1 - k)\cos^2 \xi},$$

k étant fixe, T augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre; donc T a sa valeur maximum à la périphérie; donc

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}$$

$$\text{pour } k = 0, \quad \operatorname{tg}^2 T_m = \frac{1}{\cos^2 \xi},$$

$$\text{pour } k = 1, \quad \operatorname{tg}^2 T_m = 1.$$

ξ étant fixé, T_m diminue à mesure que k croît.

Donc la déformation T_m est intermédiaire entre celle de la carte orthomorphe et celle de la carte authalique.

Échelle linéaire

$$\Delta_m = \frac{\text{la plus grande valeur de } a}{\text{la plus petite valeur de } b}.$$

Le numérateur de cette fraction se calcule aisément :

$$a = \frac{1}{(\cos \xi)^{k+1}},$$

donc a a sa plus grande valeur à la périphérie de la carte.

Le calcul du dénominateur exige quelques précautions, car b varie d'une manière singulière.

k étant fixé, b croît avec ξ, si $k < \frac{1}{3}$; donc la valeur qui nous intéresse est sa valeur du centre, c'est-à-dire $b = 1$. Si $k > \frac{1}{3}$, b diminue pour croître ensuite, après avoir passé par un minimum.

Voici quelques valeurs de ce minimum :

$k = 0.1$	0.2	0.25	0.5	0.535
$\xi = 68°$	52°	42°	27°	0°
$b = 0.70$	0.905	0.965	0.995	1.

Lorsque la latitude du minimum est hors de la carte, la valeur de b qui nous intéresse est sa valeur à la bordure.

Si, au contraire, le minimum se trouve dans la carte, c'est ce minimum qu'il faut considérer.

§ 58. — Application numérique : Calculons Δ_m pour une carte dont le rayon est de $120° = 2\xi$, $\xi = 60°$.

$k = 0.5$, à la bordure : $a = 2.85$, $b = 1.765$.

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{2.85}{1.76} = 1.60.$$

Mais la valeur minimum de b est 1, donc $\Delta_m = a = 2.85$.

$k = 0.55$, mêmes calculs, $a = 2.52$, $b = 1.26$, $\operatorname{tg}^2 T = 2$, $\Delta_m = 2.52$.

$k = 0.50$, $a = 2.47$, $b = 1.17$, $\operatorname{tg}^2 T = 2.11$. Mais b passe par son minimum à la latitude $\xi = 27°$.

Donc c'est la valeur 0.995 qui intervient dans Δ_m.

On obtient :

$$\Delta_m = \frac{2.47}{0.995} = 2.48.$$

$k = 0.25$, mêmes calculs, $a = 2.38$, $b = 1.04$, $\operatorname{tg}^2 T = 2.29$, b minimum $= 0.965$

$$\Delta_m = \frac{2.38}{0.965} = 2.46$$

$k = 0.20$, $a = 2.305$, $b = 0.920$, $\operatorname{tg}^2 T = 2.51$, b minimum $= 0.905$

$$\Delta_m = \frac{2.50}{0.905} = 2.55.$$

$k = 0.10$. Le minimum de b a lieu à la latitude $\xi = 68°$, en dehors de la carte ; il suffit donc de considérer a et b à la bordure

$$\Delta_m = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}^2 T = 3.06.$$

$k = 0$, comme ci-dessus,

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = 4.$$

$k = 1$, carte stéréographique $a = b$, $\Delta_m = a = 4$.

Ainsi, pour les cartes de 60°, quand k varie de 0 à 1, la caractéristique Δ_s croît régulièrement de 1 à 16; la caractéristique $\operatorname{tg}^2 T_m$ décroît régulièrement de 4 à 1.

La caractéristique Δ_m, qui vaut 4, passe par un minimum pour revenir à 4.

Ce minimum est environ 2.46, obtenu en faisant $k = 0.25$.

N. B. — La projection de Postel donnerait $\Delta_m = 2.42$.

§ 59. — Étudions le produit $\Delta_s \times \operatorname{tg}^4 T_m$; il dépend de l'altération de superficie et de la déformation; si nous choisissons k de manière à le rendre minimum, nous aurons établi une soi-disant compensation; ce produit est le même pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

Il vaut alors

$$\frac{1}{\cos^4 \xi}.$$

Pour le rendre minimum, égalons à 0 sa dérivée en k.

$$S \times \operatorname{tg}^4 T = ab \times \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b} = 1 : (\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi)(\cos^2 \xi)^{k+1}.$$

La dérivée égale à 0 donne

$$0 = 1 + (k + \operatorname{cotg}^2 \xi) \log_n \cos^2 \xi.$$

Donc la valeur optimum de k dépend de ξ, c'est-à-dire de l'étendue de la carte.

Applications numériques :

$$\xi = 60°, \quad k = 0.589, \quad S \times \operatorname{tg}^4 T = 12.75.$$

La carte authalique et la carte orthomorphe donnent 16.

La carte de Postel, 14.20.

$\xi = 45°$, $k = 0.44$, Produit : 3.76, Postel : 3.88

$\xi = 30°$, $k = 0.47$. Produit : 1.775, Postel : 1.78

$$\xi = 0°, \qquad -k = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \xi \,.\, \log \cos^2 \xi}{\log \cos^2 \xi} = \frac{0}{0}.$$

Appliquant trois fois successivement la règle de l'Hospital, on obtient

$$-k = \frac{\log \cos^2 \xi}{\log \cos^2 \xi - \operatorname{tg}^2 \xi} = \frac{\sin 2\xi}{\sin 2\xi + 2 \operatorname{tg} \xi} = \frac{\cos 2\xi}{\cos 2\xi + \dfrac{1}{\cos^2 \xi}},$$

d'où $k = 0.5$.

C'est la carte de Breusing; elle répond donc à la question, mais seulement pour des cartes peu étendues.

Cartes sinus et tangente.

§ 60. — La carte sinus a pour équation $\rho = n \sin \frac{z}{n}$; pour $n = 2$, elle se confond avec la carte authalique; pour $n = \infty$, elle se confond avec la carte de Postel $\rho = z$.

La carte tangente a pour équation $\rho = n \operatorname{tg} \frac{z}{n}$; pour $n = 2$, c'est la carte orthomorphe; pour $n = \infty$, c'est la carte de Postel.

Il faut démontrer que les caractéristiques de la carte sinus sont intermédiaires entre celles de Postel et de l'authalique, et que la carte tangente est intermédiaire entre la carte orthomorphe et la carte de Postel. Ces caractéristiques figurent au tableau *B*.

Cartes sinus II_8.

§ 61. — I. $$\rho = n \sin \frac{z}{n},$$

valeurs extrêmes : $2 \sin \frac{z}{2}$ et z; $n \sin \frac{z}{n}$ représente une portion de contour polygonal inscrit; elle croît à mesure que n croît, mais reste toujours inférieure à z, donc ρ est toujours intermédiaire entre les valeurs extrêmes.

II. $$a = \frac{\rho}{\sin z},$$

puis ρ est intermédiaire, a l'est aussi.

III. $$b = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \cos\frac{z}{n},$$

valeurs extrêmes : 1 et $\cos\frac{z}{2}$.

b croît à mesure que n croît; donc b est intermédiaire.

IV. $$S = ab = \frac{n}{\sin z} \cdot \sin\frac{z}{n} \cdot \cos\frac{z}{n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin\frac{2z}{n}}{\sin z},$$

valeurs extrêmes : 1 et $\frac{z}{\sin z}$. Le numérateur représente une portion de contour polygonal inscrit dans l'arc z.

V. S croît avec z; au centre, $S = 1$, donc $\Delta_z = S$ à la bordure de la carte.

VI. $$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{n}{\sin z} \cdot \operatorname{tg}\frac{z}{n},$$

valeurs extrêmes :

$$\frac{2}{\sin z} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2} z \quad \text{et} \quad \frac{z}{\sin z};$$

$n \operatorname{tg}\frac{z}{n}$ représente une portion de contour polygonal circonscrit; il est donc toujours intermédiaire entre ses valeurs extrêmes.

VII. $\operatorname{tg}^2 T$ croît à mesure qu'on s'éloigne du centre; donc sa valeur maximum est la bordure de la carte,

$$\operatorname{tg}^2 T_m = \frac{n}{\sin z} \cdot \operatorname{tg}\frac{z}{n}.$$

VIII. Calcul de

$$\Delta_m = \frac{\text{la plus grande valeur de } a}{\text{la plus petite valeur de } b}.$$

$$a = \frac{1}{\sin z} \cdot n \sin\frac{z}{n};$$

a croît à mesure qu'on s'éloigne du centre; donc sa plus grande valeur est à la bordure de la carte; $b = \cos\frac{z}{n}$; b diminue quand z croît, donc sa plus petite valeur est à la bordure, donc $\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T_m$.

IX. Calculons aussi la fonction $\Delta_s \times \operatorname{tg}^4 T_m$.

Il vient

$$S \times \operatorname{tg}^4 T = \frac{n^5}{\sin^5 z} \cdot \sin\frac{z}{n} \cdot \cos\frac{z}{n} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{z}{n}.$$

Nous rechercherons plus loin la valeur de n qui rend ce produit minimum.

Carte tangente H_9.

§ 62. — Nous procédons aux mêmes recherches que pour la carte sinus.

I. $$\rho = n \operatorname{tg}\frac{z}{n}.$$

Nous avons montré ci-dessus que cette fonction est intermédiaire entre ses valeurs extrêmes.

II. $$a = \frac{\rho}{\sin z},$$

intermédiaire à cause de ρ.

III. $$b = \frac{1}{\cos^2\frac{z}{n}},$$

toujours compris entre ses valeurs extrêmes

$$1 \text{ et } \frac{1}{\cos^2\frac{z}{2}}.$$

IV. $S = a \times b$ est intermédiaire parce que a et b sont intermédiaires.

V. $$S = \frac{1}{\sin z} \cdot \frac{n \sin \frac{z}{n}}{\cos^2 \frac{z}{n}}$$

augmente à mesure que z croît, au centre $S = 1$. Donc $\Delta = S$ à la bordure.

VI. $$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{n}{\sin z} \cdot \sin \frac{z}{n} \cdot \cos \frac{z}{n};$$

c'est la même fonction que S des cartes sinus; elle est donc intermédiaire.

VII. $\operatorname{tg}^2 T$ a sa valeur maximum à la bordure de la carte.

VIII. Calcul de

$$\Delta_m = \frac{\text{la plus grande valeur de } a}{\text{la plus petite valeur de } b}.$$

$$a = \frac{1}{\sin z} \cdot n \operatorname{tg} \frac{z}{n}$$

a sa plus grande valeur à la bordure.

$$b = \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{n}}$$

est toujours > 1. Sa plus petite valeur est au centre, où elle est 1.

Donc $\Delta_m =$ la valeur de a à la bordure

$$= \frac{n}{\sin z} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{n}.$$

C'est la même formule que pour les cartes sinus.

IX. Le produit

$$S \times \operatorname{tg}^4 T = \frac{n^3}{\sin^3 z} \cdot \sin \frac{z}{n} \cdot \cos \frac{z}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{n},$$

même formule que pour les cartes sinus.

§ 63. — Il reste à démontrer que la carte de Postel est intermédiaire entre les cartes authalique et orthomorphe.

Cela est évident pour les fonctions ρ, a, b, S.

Reste la fonction

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{z}{\sin z}$$

à comparer à

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z}.$$

Considérons l'inégalité

$$\frac{z}{2} < \operatorname{tg} \frac{z}{2};$$

on en tire

$$\frac{z}{2} < \frac{\sin \frac{1}{2} z}{\cos \frac{1}{2} z}.$$

Divisant par $\frac{1}{2} \sin z$, il vient

$$\frac{z}{\sin z} < \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z},$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 64. — Calculons la valeur de n qui rend minimum le produit $S \times \operatorname{tg}^4 T$.

Il est à prévoir que ce sera la valeur $n = \infty$, puisque ce produit est le même pour les cartes sinus et les cartes tangentes.

En égalant à 0 la dérivée en n, on obtient

$$\frac{z}{n} = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{z}{n}}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{n}},$$

satisfaite seulement pour $n = \infty$.

Nous avons remarqué, au paragraphe 58, que les cartes cosinus donnent une valeur plus petite pour ce produit.

Calculons aussi la valeur n qui rend Δ_m minimum. On peut encore prévoir que ce sera la carte de Postel.

En effet, en égalant à 0 la dérivée en n, on obtient $n = \infty$.

Donc la carte de Postel donne la plus petite variation d'échelle locale linéaire; par exemple, pour $\xi = 60°$,

$$\Delta_m = \frac{120°}{\sin 120°} = 2.42.$$

La carte cosinus donnerait $\Delta_m = 2.46$.

§ 65. *Remarque.* — Pour $n = 1$, la carte sinus se confond avec la projection orthographique; pour $n = 1$, la carte tangente est la projection gnomonique; ainsi la famille sinus-tangente renferme toutes les cartes azimutales intéressantes, hormis celles de Breusing et d'Airy.

CHAPITRE VI

Quatrième classe. Cartes coniques et tronconiques.

§ 66. — Propriétés générales : Équations

$$\theta = \lambda n, \quad \rho = f(z), \quad n < 1.$$

Les trente-six fuseaux de la sphère sont compris sur la carte dans un secteur dont l'angle est $360° \times n$.

Si $n > 1$, il y aurait recouvrement des fuseaux extrêmes.

Lorsque $\rho = 0$ pour $z = 0$, le pôle est représenté par un point (conique).

Lorsque $\rho > 0$ pour $z = 0$, le pôle est représenté par un arc de cercle (tronconique).

Formules fondamentales :

$$m_m = \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

m_p se calcule en considérant que, sur le globe, le cercle de colatitude z a pour longueur $2\pi \sin z$ et sur la carte $2\pi\rho \times n$, d'où

$$m_p = \frac{n\rho}{\sin z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Carte authalique IV_2.

§ 67. — Choisissons arbitrairement l'échelle de superficie et égalons-la à 1, soit donc $m_m m_p = 1$. Il faut donc intégrer

$$\frac{n\rho}{\sin z} \times \frac{\partial \rho}{\partial z} = 1,$$

d'où

$$2\rho d\rho = \frac{2}{n} \sin z \, . \, dz, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = -\frac{2}{n} \cos z + \text{constante}.$$

Ainsi la condition de l'authalisme nous laisse le choix arbitraire de deux paramètres n et constante, soit

$$\rho^2 = \frac{k}{n^2} - \frac{2}{n} \cos z.$$

Les axes de l'indicatrice sont

$$m_p^2 = \frac{n^2\rho^2}{\sin^2 z} = \frac{n^2}{\sin^2 z}\left[-\frac{2}{n}\cos z + \text{constante}\right] = \frac{k - 2n\cos z}{\sin^2 z}, \; m_m = \frac{1}{m_p}.$$

§ 68. — Cherchons à quelle latitude la déformation est nulle (indicat. circulaire).

Il faut

$$m_m = m_p = 1, \quad \text{ou} \quad k - 2n\cos z = \sin^2 z,$$

$$\cos^2 z - 2n\cos z + k - 1 = 0, \quad \cos z = n \pm \sqrt{n^2 - k + 1}.$$

Il y a donc deux solutions, que nous désignerons par z_1 et z_2.

Les deux solutions z_1 et z_2 sont confondues quand il existe entre les paramètres n et k la relation : $n^2 - k + 1 = 0$.

C'est la carte de Stromeyer. Elle a pour équation

$$\theta = \lambda n, \quad \rho^2 = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\cos z, \quad \cos z_{1,2} = n.$$

§ 69. Revenons au cas général où les deux solutions z_1 et z_2 sont réelles et distinctes. Soit donc $n^2 - k + 1 > 0$.

Cherchons à quelle latitude la déformation a une valeur déterminée T.

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b}$$

à cause de

$$a \times b = 1, \quad \operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2, \quad \operatorname{tg} T = a.$$

Le problème revient à chercher à quelle latitude le grand axe de l'indicatrice a une grandeur a.

Deux solutions : soit $m_m = a$, soit $m_p = a$; quand $m_m = a$, l'indicatrice est allongée suivant le méridien; quand $m_p = a$, elle est allongée suivant le parallèle.

Première solution :

$$a^2 = m_m^2 = \frac{\sin^2 z}{k - 2n \cos z},$$

deux valeurs z_3 et z_4.

$$1 - \cos^2 z = a^2 k - 2a^2 n \cos z,$$

$$\cos z_{3,4} = a^2 n \pm \sqrt{a^4 n^2 - a^2 k + 1}.$$

Deuxième solution :

$$a^2 = m_p^2 = \frac{k - 2n \cos z}{\sin^2 z}, \quad \text{ou} \quad 1 - \cos^2 z = \frac{k}{a^2} - \frac{2n}{a^2} \cos z,$$

deux valeurs z_5 et z_6

$$\cos z_{5,6} = \frac{n}{a^2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{a^4} - \frac{k}{a^2} + 1}.$$

Les deux valeurs z_3 et z_4 sont confondues quand la déformation a a une valeur particulière A, déterminée par

$$A^4 n^2 - A^2 k + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soit z_7 la latitude où z_5 et z_4 se confondent, on a

$$\cos z_7 = \mathrm{A}^2 n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Cherchons les valeurs particulières de z_8 et z_6, où la déformation est la même qu'en z_7. Soit z_8 et z_9 ces latitudes. On a

$$\cos z_{8,9} = \frac{n}{\mathrm{A}^2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{\mathrm{A}^4} - \frac{k}{\mathrm{A}^2} + 1};$$

cette égalité peut se mettre sous une forme qui simplifie les calculs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos z_8 + \cos z_9 = \dfrac{2n}{\mathrm{A}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ \cos z_8 \times \cos z_9 = \dfrac{k}{\mathrm{A}^2} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{array} \right.$$

Les équations (1) (3) (4) établissent trois relations entre les cinq variables z_8, z_9, k, n, A ; n et k sont les paramètres de la carte ; z_8 et z_9 sont les latitudes extrêmes.

A est la déformation maximum. Cette déformation a lieu aux latitudes z_8 et z_9 et à une latitude intermédiaire z_7, définie par l'équation (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}^4 n^2 - \mathrm{A}^2 k + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ \cos z_8 + \cos z_9 = \dfrac{2n}{\mathrm{A}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ \cos z_8 \times \cos z_9 = \dfrac{k}{\mathrm{A}^2} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{array} \right.$$

Carte orthomorphe IV_1.

§ 70. — La condition de l'orthomorphie s'exprime par $m_m = m_p$, d'où, par les formules (27),

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = n \frac{\rho}{\sin z}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \text{constante} \times \mathrm{tg}^n \frac{z}{2}.$$

Égalons la constante à l'unité

$$\rho = \operatorname{tg}^n \frac{z}{2}.$$

Propriétés :

$$m = \frac{n}{\sin z} \cdot \operatorname{tg}^n \frac{z}{2}, \quad S = m^2 = \frac{n^2}{\sin^2 z} \cdot \operatorname{tg}^{2n} \frac{z}{2},$$

au pôle $\rho_{z=0} = 0$. La carte orthomorphe est donc toujours conique.

$m = \frac{0}{0}$ applicant la règle de l'Hospital, il vient

$$m = \lim \frac{n}{\cos z} \cdot \operatorname{tg}^{n-1}\left(\frac{1}{2} z\right) \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z},$$

d'où $m = 0$.

Il convient donc de ne pas construire des cartes s'étendant jusqu'au pôle, car on introduit un terme qui rend infinie la valeur de Δ_m.

§ 71. *Problème I.* — Déterminer le paramètre n pour que l'échelle soit la même aux latitudes z_1 et z_2.

L'équation à résoudre est $m_1 = m_2$ ou

$$\frac{n}{\sin z_1} \operatorname{tg}^n \frac{z_1}{2} = \frac{n}{\sin z_2} \cdot \operatorname{tg}^n \frac{z_2}{2},$$

d'où

$$n = \frac{\log \sin z_1 - \log \sin z_2}{\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} z_1 - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} z_2}.$$

Exemple : L'Espagne est comprise entre les parallèles de colatitude

$$z_1 = 54°, \qquad z_2 = 46°10',$$

il vient $n = 0.642$.

§ 72. *Problème II.* — Déterminer à quelle latitude l'échelle est maximum. Soit z_0 cette latitude; elle se calcule par

$$\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \quad \text{ou} \quad n + \sin^2 \frac{1}{2} z_0 - \cos^2 \frac{1}{2} z_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \cos z_0 = n.$$

Exemple : Pour la carte d'Espagne,

$$\cos z_0 = 0.642, \quad z_0 = 50°2'15''.$$

Il faut remarquer que z_0 n'est pas la moyenne arithmétique entre z_1 et z_2.

§ 73. *Problème III.* — Calculer Δ_m pour la zone $z_1 z_2$. Les valeurs extrêmes de m sont m_0 et $m_1 = m_2$.

$$\Delta_m = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} z_0}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} z_1} \right)^n \cdot \frac{\sin z_1}{\sin z_0}.$$

Exemple : Pour la carte d'Espagne,

$$\Delta_m = 1.002542.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce résultat pour le comparer à la carte d'Espagne proposée par Tissot.

Carte de de l'Isles, IV_3.

$$\theta = \lambda n, \quad \rho = k + z.$$

§ 74. — Propriétés :

$$m_n = 1, \quad m_p = \frac{n(k + z)}{\sin z}, \quad S = m_p, \quad \Delta_s = \Delta_{m_p}.$$

Problème I. — Quel est le parallèle dont l'échelle linéaire est minimum?

Cette latitude se calcule par

$$\frac{\partial m_p}{\partial z} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{(k + z)\cos z}{\sin^2 z} = \frac{1}{\sin z}.$$

Cette latitude est donc indépendante de n. Elle ne dépend que de k. Soit z_3 cette latitude. Il vient $\operatorname{tg} z_3 = k + z_3$.

A cette latitude,

$$(m_p)_3 = (m_p)_{\min.} = \frac{n}{\cos z_3}.$$

La carte peut se définir par

$$\theta = \lambda n, \quad \rho = z + \operatorname{tg} z_3 - z_3.$$

§ 75. *Problème II.* — Calculer la relation entre les paramètres n et k pour que m_p ait pour valeur minimum 1.

Il faut $(m_p)_3 = 1$, d'où $n = \cos z_3$. La relation entre n et k s'exprime par des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \cos z_3 \\ k = \operatorname{tg} z_3 - z_3 \end{array} \right\} \text{ d'où l'on élimine } z_3.$$

La carte n'a plus qu'un seul paramètre arbitraire.

Elle peut se mettre sous la forme

$$\theta = \lambda \cos z_3, \quad \rho = z + \operatorname{tg} z_3 - z_3.$$

C'est la projection conique simplifiée, IV_4

Nous y reviendrons plus loin.

§ 76. *Problème III.* — A quelle latitude l'indicatrice est-elle circulaire?

Elle se calcule par

$$m_m = m_p, \quad \text{ou} \quad m_p = 1, \quad \text{d'où} \quad \sin z = n(k + z),$$

équation à deux racines, dépendant de n et k.

Pour la carte conique simplifiée, l'équation à résoudre est

$$\sin z = \cos z_3 (z + \operatorname{tg} z_3 - z_3), \quad \text{d'où} \quad z = z_3.$$

Donc les deux solutions sont confondues. Il n'est qu'une latitude où l'indicatrice est circulaire.

§ 77. *Problème IV.* — A quelle latitude la déformation est-elle la même que pour la latitude z_3?

Il faut que l'indicatrice soit semblable à l'indicatrice de z_3, d'où

$$\frac{m_p}{m_m} = \left(\frac{m_m}{m_p}\right)_3, \quad \text{ou} \quad \frac{m_p}{1} = \frac{1}{(m_p)_3}, \quad \text{ou} \quad m_p = \frac{\cos z_3}{n},$$

$$\frac{n(k + z)}{\sin z} = \frac{\cos z_3}{n}, \quad \sin z = \frac{n^2(k + z)}{\cos z_3},$$

équation à deux racines.

Pour la carte conique simplifiée,

$$\sin z = \cos z_5 [z + \operatorname{tg} z_5 - z_5], \quad \text{d'où} \quad z = z_5.$$

La latitude z_5 est sa propre conjuguée.

§ 78. — Exemple : Soit à dresser la carte d'une zone dont le bord inférieur est marqué par l'équateur, tellement que $\Delta_s = 1.185$,

$$\Delta_s = \Delta_{m_p} = \frac{(m_p)_{90}}{(m_p)_5}, \quad (m_p)_{90} = n\left(k + \frac{\pi}{2}\right), \quad (m_p)_5 = \frac{n}{\cos z_5};$$

d'où

$$\Delta_{m_p} = 1.185 = \cos z_5 [\operatorname{tg} z_5 - z_5 + 1.57]$$

Ainsi la valeur imposée de Δ_s ne détermine que z_5, n reste arbitraire. L'équation résolue donne $z_5 = 55°$, $k = 0.402$.

$$(m_p)_5 = \frac{n}{0.602}, \quad (m_p)_{90} = n \times 1.97.$$

Cherchons la latitude où le parallèle est à la même échelle que l'équateur

$$m_p = \frac{n(k + z)}{\sin z} = n \times 1.97, \quad \text{d'où} \quad z = 25°.$$

§ 79. *Choix de* n. — Si l'on choisit la carte conique simplifiée,

$$n = \cos z_5 = 0.602, \quad (m_p)_5 = 1, \quad (m_p)_{90} = (m_p)_{25} = 1.185,$$

le maximum de T se trouve à l'équateur et au parallèle 25°. L'angle T se calcule par

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{(m_p)_{\max.}}{(m_p)_5} = 1.185, \quad \omega = 5°.$$

Il est plus avantageux de choisir n de manière que la latitude centrale ait pour conjuguée les bords supérieur et inférieur de la carte.

Puisque

$$\frac{(m_p)_{90}}{(m_p)_{55}} = 1.185, \quad \text{soit} \quad (m_p)_{90} = \sqrt{1.185} = 1.09,$$

$$(m_p)_{55} = \frac{1}{\sqrt{1.185}} = 0.92, \quad \frac{n}{0.602} = 0.92, \quad \text{d'où} \quad n = 0.554.$$

$$\operatorname{tg}^2 T = 1.09, \qquad \omega = 2^\circ 30'$$

au lieu de $\omega = 5^\circ$.

Ainsi la carte de de l'Isles donne une déformation maximum plus petite.

Carte conique simplifiée, IV_4;
en allemand : *Gewöhnliche mittabstandstreue Kegelprojection.*

$$\theta = \lambda \cos z_3, \quad \rho = z + \operatorname{tg} z_3 - z_3.$$

§ 80. — Propriétés :

$$m_m = 1, \qquad m_p = \frac{\cos z_3}{\sin z} \cdot [z + \operatorname{tg} z_3 - z_3], \qquad (m_p)_{\min} = (m_p)_3 = 1,$$

$$\Delta_m = \Delta_{m_p} = \frac{\cos z_3}{\sin z}[z + \operatorname{tg} z_3 - z_3],$$

$$S = m_p, \qquad \Delta_s = \Delta_{m_p} = \frac{\cos z_3}{\sin z}[z + \operatorname{tg} z_3 - z_3],$$

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{m_p}{m_m} = m_p = \frac{\cos z_3}{\sin z}[z + \operatorname{tg} z_3 - z_3].$$

§ 81. — Il est aisé de constater que les cartes tronconiques ont pour cas limites des cartes cylindriques et les cartes azimutales.

Ainsi toutes les cartes du premier groupe peuvent être comprises dans huit familles :

1. Carte conique orthomorphe	IV_1.	Cas limites	I_1 II_1	3
2. Carte tronconique authalique	IV_2.	id.	I_2 II_2 IV_2	4
3. Carte tronconique équidistante	IV_3.	id.	I_3 II_3 IV_4	4
4. Cartes cosinus	II_{10}.	id.	II_3 II_4 II_2	2
5. Cartes sinus et tangente	II_8 II_9.	id.	II_1 II_2 II_3 II_4 II_6	2
6. Perspective épicylindrique	I_4.			1
7. Carte d'Airy	II_7.			1
8. Cartes perspectives	$III_{1\,2\,3\,4\,5\,6}$.	Cas limites	II_1 II_6 II_4	6
8 familles.				23 cartes.

CHAPITRE VII

DEUXIÈME GROUPE

Nous avons rangé dans ce groupe les cartes des cinquième, sixième et septième classes. Les divers fuseaux de la sphère ne sont pas représentés par le même dessin.

Complément de la théorie des altérations.

§ 82. — Nous avons établi la formule

$$m^2 = A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + C \sin \alpha \cos \alpha,$$

donnant l'échelle linéaire m en fonction de l'azimut α. Soit la notation $k = \operatorname{tg} \alpha$, il vient

$$m^2[1 + k^2] = Ak^2 + B + Ck.$$

Calculons le maximum M de m.

L'équation dérivée devient

$$2M.\frac{\partial M}{\partial k}(1 + k^2) + M^2(2k) = 2Ak + C.$$

En annulant $\frac{dm}{dk}$, il vient

$$M^2(2k) = 2Ak + C,$$

$$k^2 + \frac{2(B - A)}{C}k - 1 = 0.$$

Éliminant k entre ces deux équations, on obtient

$$M^4 - (B + A)M^2 + AB - \frac{C^2}{4} = 0.$$

M^2 est donc racine d'une équation du second degré. Les deux solutions sont a^2 et b^2, et l'on obtient

$$a^2 + b^2 = A + B, \qquad a^2 \times b^2 = AB - \frac{C^2}{4}.$$

Remplaçant A, B, C par leurs valeurs, il vient

$$a^2 + b^2 = m_m^2 + m_p^2 = q^2 + q'^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}(p^2 + p'^2),$$

$$a^2 \times b^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}[(p^2+p'^2)(q^2+q'^2) - (pq+p'q')^2] = \frac{1}{\cos^2\varphi}[pq' - p'q]^2.$$

L'échelle de superficie est

$$S = ab. = \frac{1}{\cos\varphi}[pq' - p'q].$$

Calculons l'angle Θ formé sur la carte par le parallèle et le méridien.

L'orientation d'un élément de la carte est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p' \operatorname{tg}\alpha + q' \cos\varphi}{p \operatorname{tg}\alpha + q \cos\varphi}$$

Suivant la direction du méridien,

$$\alpha = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_m = \frac{q'}{q}.$$

De même, suivant la direction du parallèle,

$$\alpha = 90^\circ, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_p = \frac{p'}{p}.$$

L'angle de ces deux directions est donc

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{pq' - p'q}{pq + p'q'},$$

d'où

$$\sin^2\Theta = \frac{(pq' - p'q)^2}{(p^2 + p'^2)(q^2 + q'^2)} = \frac{(pq' - p'q)^2}{m_m^2 \times m_p^2 \times \cos^2\varphi},$$

donc

$$S = ab = m_m \times m_p \times \sin\Theta.$$

Cette formule pouvait se démontrer en considérant que sur la carte le parallèle et le méridien sont des diamètres conjugués de l'indicatrice.

Calcul de a *et* b.

§ **83.** — a et b sont les valeurs extrêmes de m; a est la plus grande.

Les formules précédentes donnent

$$(9)\quad a^2 + b^2 = m_m^2 + m_p^2 = \frac{p^2 + p'^2}{\cos^2 \varphi} + q^2 + q'^2$$

$$(13)\quad ab = \frac{1}{\cos \varphi}[pq' - p'q].$$

Les valeurs a et b comprennent des radicaux superposés; pour les éliminer, posons

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{K} + \sqrt{L} \\ b &= \sqrt{K} - \sqrt{L} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

d'où

$$a^2 + b^2 = 2K + 2L, \qquad ab = K - L,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} 4K &= \left(\frac{p}{\cos \varphi} + q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{\cos \varphi} - q\right)^2 \\ 4L &= \left(\frac{p}{\cos \varphi} - q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{\cos \varphi} + q\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

Substituant les valeurs de a et b dans les formules donnant l'altération d'angle, on obtient

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)^2}{K - L},$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K - L}},$$

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}.$$

Formules de l'authalisme.

§ 84. — Nous prendrons dorénavant

$$S = a \times b = 1, \qquad \text{d'où} \quad K = 1 + L, \qquad \text{et} \qquad \cos \varphi = pq' - p'q.$$

$$\operatorname{tg} T = \sqrt{K} + \sqrt{L} = \sqrt{L + 1} + \sqrt{L},$$

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{L}, \ \operatorname{tg} T = a.$$

Formules de l'orthomorphie.

§ 85. — Nous avons défini l'orthomorphie par $a = b$; à cause des formules (20), il vient $L = 0$.

L étant une somme de deux carrés, il faut que chaque carré soit nul, d'où

$$\left.\begin{aligned} p + q' \cos\varphi &= 0 \\ p' - q \cos\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Les calculs se simplifient dans certains cas. Si l'on change de variable, en introduisant au lieu de φ la variable u définie par

$$du = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dz}{\sin z},$$

au lieu des dérivées

$$q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad q = \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

nous introduisons les dérivées

$$Q' = \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Il vient alors

$$Q = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -q \cos\varphi,$$

$$Q' = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -q' \cos\varphi.$$

Les formules (22) deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} p - Q' &= 0 \\ p' + Q &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22')$$

CHAPITRE VIII

Cinquième classe. — Sur la carte, les cercles de latitude sont représentés par des droites parallèles.

Pour les cartes de la cinquième classe, il convient de placer l'axe des y parallèle à l'équateur; alors

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0,$$

et de placer l'axe des x suivant le nul méridien, alors x s'annule pour $\lambda = 0$.

Carte orthomorphe.

§ 86. — La première des deux conditions de l'orthomorphie est $p' = p \cos \varphi$; or, $p' = 0$ pour la cinquième classe; donc

$$q = 0. \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0.$$

Donc les méridiens sont rectilignes et parallèles. Nous revenons ainsi aux cartes de la première classe.

Cartes authaliques.

§ 87. — La condition de l'authalisme est $pq' - p'q = \cos \varphi$, à cause de $p' = 0$, il vient $pq' = \cos \varphi$, d'où

$$p = \frac{\cos \varphi}{q'} = \text{fonction de } \varphi, \quad \text{d'où } \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\cos \varphi}{q'},$$

en intégrant,

$$x = \lambda \frac{\cos \varphi}{q'} + \text{c}^{\text{te}}.$$

Pour que x s'annule pour $\lambda = 0$, il faut annuler la constante, donc

$$x = \lambda \frac{\cos \varphi}{q'}.$$

D'où le théorème :

La condition d'être authalique et la condition d'être de la cinquième classe donnent x proportionnel à λ et laissent le choix arbitraire de la fonction qui définit y

$$q = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \lambda \left[-\frac{\sin \varphi}{q'} - \frac{\cos \varphi}{q'^2} \cdot \frac{dq'}{d\varphi} \right],$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left[q' - \frac{1}{q'} \right]^2 + \frac{\lambda^2}{q'^2} \left[\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{1}{q'} \cdot \frac{dq'}{d\varphi} \right]^2.$$

Étudions quelques exemples en choisissant arbitrairement la fonction y.

Carte V_3. $\quad y = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi.$

§ 88. — Cette carte peut se raccorder, le long du nul méridien, à une carte azimutale authalique

$$\rho = 2 \sin \frac{1}{2} z.$$

Propriétés :

$$y = 2 \sin \xi, \qquad q' = \frac{dy}{d\varphi} = \cos \xi, \qquad p = \frac{\cos \varphi}{\cos \xi},$$

$$x = \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \xi}, \qquad \frac{dq'}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \sin \xi,$$

$$q = -\lambda \left[\frac{\sin \varphi}{q'} + \frac{\cos \varphi}{q'^2} \cdot \frac{dq'}{d\varphi} \right] = -\lambda \sin \xi \left[1 + \frac{1}{2 \cos^2 \xi} \right],$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = -2 + \cos^2 \xi + \frac{1}{\cos^2 \xi} + q^2.$$

La déformation est nulle à l'équateur.

Pour connaître l'équation cartographique de l'équidéformée, remplaçons λ et ξ en fonction de x et de y.

$$\sin \xi = \frac{1}{2} y, \qquad \cos^2 \xi = \frac{1}{4} [4 - y^2],$$

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi = 1 - \frac{1}{2} y^2,$$

$$\lambda = \frac{x \cos \xi}{\cos \varphi} = \frac{x\sqrt{4 - y^2}}{2 - y^2},$$

$$q = -\frac{x\sqrt{4 - y^2}}{2 - y^2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \left[\frac{6 - y^2}{4 - y^2}\right] = -\frac{xy}{2} \cdot \frac{6 - y^2}{2 - y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}.$$

L'équation devient

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = -2 + 1 - \frac{y^2}{4} + \frac{4}{4 - y^2} + \frac{x^2 y^2}{4} \cdot \left(\frac{6 - y^2}{2 - y^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4 - y^2},$$

$$\frac{16 \operatorname{tg}^2 \omega}{y^2} - 4 \operatorname{tg}^2 \omega - \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4}\left(\frac{6 - y^2}{2 - y^2}\right)^2.$$

Application numérique. — Soit $4 \operatorname{tg}^2 \omega = 0.5$,

$$x^2 \left(\frac{6 - y^2}{2 - y^2}\right)^2 = \frac{8}{y^2} - 2 - y^2.$$

Cette équidéformée passe par le pôle et coupe le méridien de longitude 180°, à la latitude $\varphi = 17°$.

Ci-contre les coordonnées géographiques λ et ξ et les coordonnées cartographiques x et y de quelques points de cette courbe.

ξ	λ	y
8°40′	3.44	0.30
13	2.08	0.448
18.2	1.425	0.632
22 8	1.112	0.774
26.7	0.92	0.894
30	0.78	1
33	0.648	1.096
36	0.532	1.184
39	0.413	1.266
42	0.282	1.344

Carte de Prépetit-Foucault modifiée, V_1.

§ **89.** — Prépetit-Foucault pose

$$y = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

Posons

$$y = \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$q' = \frac{1}{2n\cos^2\frac{1}{2}\varphi},$$

d'où

$$x = \lambda \,.\, \cos\varphi \,.\, 2n\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -2\lambda n \sin\varphi\left[\cos\varphi + \cos^2\frac{1}{2}\varphi\right],$$

$$m_m^2 = q^2 + q'^2 = \frac{1}{4n^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi} + 4\lambda^2 n^2 \sin^2\varphi\left[\cos\varphi + \cos^2\frac{1}{2}\varphi\right]^2,$$

$$m_p^2 = \frac{p^2 + p'^2}{\cos^2\varphi}, \quad \text{d'où} \quad m_p = 2n\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Le lieu des points où l'indicatrice est circulaire s'exprime par $m_m = m_p = 1$, d'où

$$\begin{cases} \cos^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2n}, \\ \lambda \sin\varphi\left[\cos\varphi + \cos^2\frac{1}{2}\varphi\right] = 0. \end{cases}$$

Ce lieu est un point unique défini par

$$\lambda = 0, \quad \cos^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2n}.$$

Ce point n'existe que pour $2n > 1$.

Pour $n = \frac{1}{2}$, ce point se confond avec l'origine des coordonnées.

Reprenons le cas général $2n > 1$.

Sur l'équateur

$$x = 2n\lambda, \qquad m_p = 2n, \qquad m_m = \frac{1}{2n},$$

donc $m_p > m_m$, donc l'indicatrice est allongée suivant l'équateur ; elle est la même pour tous les points de l'équateur.

Sur le nul méridien

$$m_p = 2n\cos^2\frac{1}{2}\varphi, \qquad m_m = \frac{1}{2n\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Il est une latitude φ_1 qui donne sur le nul méridien la même indicatrice que sur l'équateur.

Elle est déterminée par $m_m = 2n$; d'où

$$\cos\frac{1}{2}\varphi_1 = \frac{1}{2n}.$$

Le lieu des points où la déformation a une valeur donnée a pour équation

$$4n^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4n^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi} + 4\lambda^2n^2\sin^2\varphi\left[\cos\varphi + \cos^2\frac{1}{2}\varphi\right]^2 = 4\operatorname{tg}^2\omega.$$

Ce lieu est représenté sur la carte par une courbe qui a pour équation

$$c^{te} = \frac{4n^2}{(1+ny)^2} + \frac{(1+ny)^2}{4n^2} + 4yn\cdot\frac{x^2}{(1-yn)^2}\cdot\left(\frac{2-ny}{1+ny}\right)^2.$$

Carte de Flamsteed (V_2).

$$y = \varphi, \quad q' = 1, \quad \text{d'où} \quad x = \lambda\cos\varphi.$$

§ 90. — Propriétés : $q = -\lambda\sin\varphi$.

$4\operatorname{tg}^2\omega = 4L =$ par la formule $(21) = \lambda^2\sin^2\varphi$, $\quad 2\operatorname{tg}\omega = \lambda\sin\varphi$,

$$m_m^2 = 1 + \lambda^2\sin^2\varphi, \quad m_p = 1.$$

Pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartographiques, on remplace φ par y et λ par $\frac{x}{\cos y}$.

Théorème I. — Le lieu des points où l'altération d'angle a une valeur définie par $2 \operatorname{tg} \omega = K$ a pour équation $\lambda \sin \varphi = K$.

Sur la carte, ce lieu a pour équation $x = K \times \operatorname{cotg} y$.

Corollaire : Le lieu des points où l'indicatrice est circulaire a pour équation $\omega = 0$ ou $\lambda \sin \varphi = 0$, ou

$$\lambda = 0, \quad \text{axe des } y,$$
$$\varphi = 0, \quad \text{axe des } x,$$

ce lieu est donc les deux axes de coordonnées.

§ 91. *Théorème II.* — Le rectangle inscrit dans la courbe $\lambda \sin \varphi = K$ a une superficie constante, quel que soit le rapport de ses dimensions. (Il faut entendre par rectangle une figure limitée par deux parallèles et deux méridiens.)

En effet, soit λ_1 la demi-longueur du rectangle, sa hauteur se calcule par

$$\sin \varphi_1 = \frac{K}{\lambda_1}.$$

Il a pour superficie le produit de la longueur par le sinus de la hauteur, soit $2\lambda_1 \times 2 \sin \varphi_1 = 4K$. Donc la superficie est indépendante de λ_1.

Cas particulier — Soit la demi-longueur $\lambda = 180°$, alors φ_2 se calcule par

$$\sin \varphi_2 = \frac{K}{\lambda} = \frac{K}{\pi}.$$

Le rectangle a pour superficie $4K$ (fig. 9).

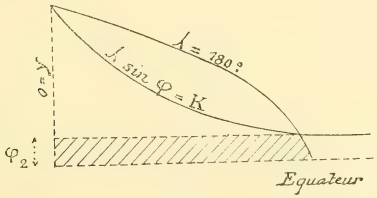


Fig. 9.

Théorème III. — La surface ABC comprise entre le nul méri-

dien AB, la courbe AC définie par $\lambda \sin \varphi = K$ et le parallèle BC aboutissant au méridien 180°, a pour superficie

$$K \log \frac{\pi}{K} \text{ (fig. 10).}$$

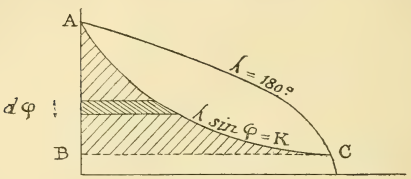


Fig. 10.

En effet, un élément de zone a pour superficie

$$\lambda \times d(\sin \varphi) = \lambda \cos \varphi d\varphi.$$

Mais

$$\sin \varphi = \frac{K}{\lambda},$$

d'où

$$\text{élément} = K \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Il faut intégrer depuis $\varphi = 90^\circ$ jusque $\varphi = \varphi_2$

$$\sin \varphi_2 = \frac{K}{180^\circ} = \frac{K}{\pi}.$$

Donc

$$\text{superficie} = K \cdot \int \operatorname{cotg} \varphi \, . \, d\varphi = \left[K \log_n \sin \varphi \right]_1^{\frac{K}{\pi}} = K \log \frac{\pi}{K}.$$

§ **92.** *Résumons les théorèmes II et III.* — La portion du globe qu'on peut représenter par la projection de Flamsteed, tellement que l'altération d'angle ne dépasse pas $2 \operatorname{tg} \omega = K$, a pour superficie

$$4 \left[K + \log_n \cdot \frac{\pi}{K} \right].$$

Exemple : Soit $\omega = 6° 20'$. $K = 2 \operatorname{tg} 6° = 0.225$.

La superficie vaut 3.28.

La sphère entière a pour superficie 4π; donc la portion représentée vaut les 0.261 de la sphère.

Le rectangle inscrit a pour superficie $4K = 0.900$, soit les 0.0716 de la sphère $= \frac{1}{14}$.

Projection de Flamsteed modifiée, V_2

§ **93.** — Nous proposons de modifier la projection de Flamsteed, en faisant $y = n\varphi$, d'où

$$q' = n, \quad x = \frac{\lambda \cos \varphi}{n}, \quad q = -\frac{\lambda \sin \varphi}{n}, \quad p' = 0, \quad p = \frac{\cos \varphi}{n}.$$

Par les formules (21), on obtient

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{1}{n} - n\right)^2 + \left(\frac{\lambda \sin \varphi}{n}\right)^2.$$

Le lieu des points où la déformation a une valeur donnée a donc pour équation $\lambda \sin \varphi =$ constante.

§ **94.** *Problème I.* — Étant donnée la région limitée par le contour $\lambda \sin \varphi = K$, choisir n de manière que la plus grande déformation soit un minimum.

Sur le contour

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{1}{n} - n\right)^2 + \left(\frac{K}{n}\right)^2.$$

Égalons à zéro la dérivée en n. Il vient

$$n^2 = \sqrt{K^2 + 1}.$$

Et l'altération maximum est

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = -2 + 2\sqrt{1 + K^2}.$$

La valeur de $\operatorname{tg} \omega$ sur les axes de coordonnées est

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{1}{n} - n\right)^2 = -2 + \sqrt{1 + K^2} + \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}}.$$

Exemple : Soit le contour

$$\lambda \sin \varphi = 1, \quad \text{d'où} \quad n^2 = \sqrt{1+1} = 1.414,$$

à la bordure

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = -2 + 2\sqrt{2} = 0.8284, \qquad \operatorname{tg} \omega = 0.455, \qquad \omega = 24°30'.$$

Sur les axes de coordonnées

$$\operatorname{tg} \omega = 0.175, \qquad \omega = 10°.$$

La projection de Flamsteed aurait donné

$$2 \operatorname{tg} \omega' = K, \qquad \operatorname{tg} \omega' = 0.5, \qquad \omega = 26°30'.$$

§ 95. *Réciproque. Problème II.* — Étant donnée une altération maximum $4 \operatorname{tg}^2 \omega = M$, donner une carte de superficie maximum (carte rectangulaire).

Soit K la surface du rectangle inscrit :

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = M = \left(\frac{1}{n} - n\right)^2 + \frac{K^2}{n^2},$$

$$M = -2 + \frac{1}{n^2} + n^2 + \frac{K^2}{n^2}, \quad \text{d'où} \quad K^2 = -n^4 + 2n^2 - 1 + Mn^2.$$

La valeur de n qui rend K maximum est

$$n^2 = \frac{M}{2} + 1,$$

alors

$$K^2 = \frac{M^2}{4} + M.$$

Exemple : Soit

$$\operatorname{tg} \omega = 0.5, \qquad \omega = 26°30', \qquad M = 1,$$

alors

$$K^2 = 1.25, \qquad n^2 = 1.5.$$

Le rectangle inscrit dans la courbe a pour superficie $4K = 4.47$.

La projection de Flamsteed eût donné : $K = 1$. Le rectangle inscrit aurait pour superficie 4.

Ainsi, par notre méthode, le rectangle inscrit est 1.118 fois plus grand.

Deuxième application numérique. — Soit

$$4\operatorname{tg}^2\omega = 0.5;$$

on a

$$0.5 = -2 + n^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi}{n^2}.$$

La carte est limitée au contour

$$\lambda \sin\varphi = \sqrt{2.5n^2 - 1 - n^4},$$

et le rectangle inscrit a pour superficie

$$4 \times \sqrt{2.5n^2 - 1 - n^4}.$$

Pour rendre ce rectangle maximum, il faut annuler la dérivée en n; soit donc

$$n = \sqrt{1.25},$$

et le rectangle a pour superficie

$$4 \times 0.75 = 3, \quad \text{soit les } \frac{23.9}{100}$$

du globe.

La projection de Flamsteed eût donné

$$4\operatorname{tg}^2\omega = 0.5 = \lambda^2 \sin^2\varphi,$$

et le rectangle aurait pour superficie

$$4 \times \sqrt{0.5} = 2.83, \quad \text{soit les } \frac{22.6}{100}$$

du globe.

§ 96. *Problème III.* — Étant donnée une déformation maximum $4\operatorname{tg}^2\omega = 0.5$, choisir n de manière que la superficie renfermée dans l'équidéformée soit maximum.

L'aire comprise vaut

$$4 \times K[1 + \log\pi - \log K], \quad \text{où} \quad K = \sqrt{2.5n^2 - 1 - n^4}.$$

Pour calculer le maximum, égalons à zéro la dérivée en n.

$$\frac{dS}{dn} = \frac{dS}{dK} \cdot \frac{dK}{dn}. \qquad \frac{dS}{dK} = [1 + \log\pi - \log K] + K\left[-\frac{1}{K}\right] = \log\frac{\pi}{K}.$$

$$\frac{dK}{dn} = \frac{5n^2 - 4n^5}{2K}.$$

En fait, dans le produit

$$K\left[1 + \log \frac{\pi}{K}\right],$$

le terme logarithmique n'est pas prépondérant, et le maximum de superficie s'obtient par le maximum de K. Soit donc, comme dans le problème II,

$$n = \sqrt{1.25}, \qquad K = 0.750,$$

$$S = 4 \times 0.75 \times 2.302 \log_{vulg} \frac{\pi \times e}{0.75} = 4 \times 1.82 = 7.28,$$

soit les $\frac{58}{100}$ de la sphère.

La projection de Flamsteed eût donné

$$n = 1, \qquad K = 0.707,$$

$S = 4 \times 0.707 \times 2.505 \log_{vulg} \frac{\pi \times e}{0.707} = 4 \times 1.755 = 7$, soit les $\frac{56}{100}$ du globe.

Carte de Collignon, V_5.

§ 97. — Collignon représente l'hémisphère par un losange

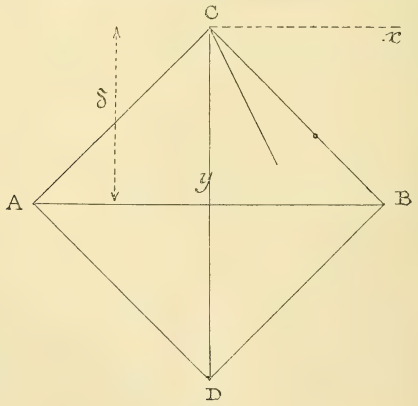


Fig. 11.

ACBD, où les méridiens sont rectilignes et convergents aux

pôles C et D. En réalité, la projection est discontinue à l'équateur; elle est formée de l'assemblage de deux projections ACB et ADB.

Cherchons l'équation de la projection ACB (fig. 11).

Déplaçons l'axe des x pour qu'il passe par le pôle. L'équation d'un méridien devra être $x = y \times \text{c}^{\text{te}}$. Mais les cartes de la cinquième classe doivent avoir x proportionnel à λ, donc

$$x = \lambda y \times \text{c}^{\text{te}} = k\lambda y.$$

Puisque y est indépendant de λ,

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p = ky, \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = k\lambda \frac{\partial y}{\partial \varphi} = k\lambda q'.$$

La condition de l'authalisme est $\cos\varphi = pq'$; remplaçant p par ky, il vient

$$\cos\varphi = ky \cdot \frac{dy}{d\varphi},$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{1}{2} ky^2 = \text{c}^{\text{te}} + \sin\varphi.$$

y s'annule pour $\varphi = 90°$; donc $\text{c}^{\text{te}} = -1$. On a

$$\frac{1}{k} y^2 = \sin\varphi - 1,$$

k se calcule par $y_{\varphi=0} = \delta$,

d'où

$$k = -\frac{2}{\delta^2}, \qquad y^2 = \delta^2(1 - \sin\varphi), \qquad x = -\frac{2}{\delta^2} y\lambda.$$

Propriétés :

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{2}{\delta}\sqrt{1 - \sin\varphi}, \qquad p' 0,$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{2\lambda \cos\varphi}{\delta\sqrt{1 - \sin\varphi}}, \qquad q' = -\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \sin\varphi}}.$$

Le lieu des points où tg ω a une valeur donnée a pour équation

$$4\,\text{tg}^2\omega = \frac{4}{\delta^2} \cdot \frac{1 - \sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{1 - \sin\varphi}\left[\frac{4\lambda^2}{\delta^2} + \frac{\delta^2}{4}\right].$$

Sur la carte, cette courbe a pour équation

$$16\,\mathrm{tg}^2\omega \times \delta^4 = \frac{16\delta^4}{2\delta^2 - y^2} + \delta^4(2\delta^2 - y^2) + (2\delta^2 - y^2)\frac{4\delta^4 x^2}{y^2}.$$

Cartes à méridiens elliptiques, V_4.

§ 98. — Nous démontrerons d'abord le théorème : Dans une carte authalique de la cinquième classe, pour que tous les méridiens soient elliptiques, il suffit qu'un seul d'entre eux soit représenté par une demi-circonférence.

En effet, les cartes authaliques de la cinquième classe ont x proportionnel à λ; donc si un méridien est circulaire, les autres méridiens ont pour abscisse l'abscisse d'un cercle multipliée par une quantité constante. Donc ils sont elliptiques.

Calculons les équations de la carte; soit R le rayon de la

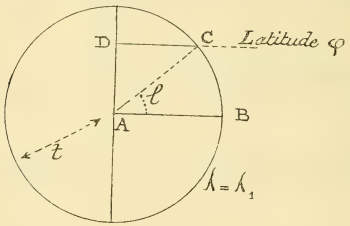


Fig. 12.

sphère; soit λ_1 la longitude dont le méridien est représenté par la demi-circonférence; soit t le rayon AC (fig. 12).

La surface sphérique A'B'C'D' a pour superficie une portion de zone

$$= \mathrm{R}\sin\varphi \times 2\pi\mathrm{R} \times \frac{\lambda_1}{360^\circ} = \mathrm{R}^2 \sin\varphi \,.\, \lambda_1.$$

Sur la carte,

$$\mathrm{ABCD} = \mathrm{ADC} + \mathrm{ACB},$$

$$\mathrm{ADC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AD.DC} = \frac{1}{2}\,t\cos l \times t\sin l,$$

$$\mathrm{CAB} = \text{secteur} = \pi t^2 \times \frac{l}{360^\circ} = \frac{1}{2}\,l t^2,$$

d'où

$$R^2 \sin \varphi \lambda_1 = \frac{1}{4} l^2 [2l + \sin 2l] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

t se calcule en faisant $l = 90°$. $\varphi = 90°$ dans l'équation (1).

Il vient

$$R^2 . \lambda_1 = \frac{1}{4} t^2 \pi, \qquad \text{d'où } t^2 = 4R^2 \frac{\lambda_1}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Remplaçant par t sa valeur dans (1), il vient

$$\pi \sin \varphi = 2l + \sin 2l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Les équations du système sont donc

$$y = t \sin l.$$

$$x = \frac{\lambda}{\lambda_1} t \cos l.$$

$$t^2 = 4R^2 \frac{\lambda_1}{\pi}.$$

$$\pi \sin \varphi = 2l + \sin 2l.$$

Autre démonstration. — Soit λ_1 la longitude du méridien représenté par un cercle, et soit t_1 le rayon de ce cercle sur la carte. Un point de ce cercle a pour coordonnées

$$y_1 = t \sin l, \qquad x_1 = t \cos l.$$

l étant l'inclinaison du rayon aboutissant au point considéré, cet angle est fonction de φ.

Pour $l = 0$, $\varphi = 0$; pour $l = 90°$, $\varphi = 90°$.

Un autre point de même latitude a pour ordonnée

$$y = t \sin l.$$

Son abscisse est proportionnelle à λ; donc

$$x = x_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} = t \frac{\lambda}{\lambda_1} \cos l.$$

La condition de l'authalisme nous donnera la relation qui lie l à φ. En effet, on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda_1} t \cos l, \qquad q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = t \cos l \frac{dl}{d\varphi}.$$

La condition de l'authalisme $pq = \cos\varphi$ donne

$$\cos\varphi = \frac{1}{\lambda_1} t^2 \cos^2 l \frac{dl}{d\varphi},$$

ou $$\cos\varphi\, d\varphi = \frac{t^2}{2\lambda_1}[2\cos^2 l]\, dl = \frac{t^2}{4\lambda_1}[1 + \cos 2l] 2dl,$$

d'où $$\sin\varphi = \frac{t^2}{4\lambda_1}[2l + \sin 2l] + \text{c}^{\text{te}}.$$

La constante est nulle parce que $\varphi = 0$ pour $l = 0$.

Calculons t par la condition $\varphi = 90°$ pour $l = 90°$. Il vient

$$1 = \frac{t^2}{4\lambda_1} \cdot [\pi + 0], \qquad \text{d'où} \quad t^2 = \frac{4\lambda_1}{\pi}.$$

Et la carte a pour équations

$$y = t \sin l, \qquad \pi \sin\varphi = 2l + \sin 2l,$$

$$x = \frac{\lambda}{\lambda_1} t \cos l, \qquad \pi t^2 = 4\lambda_1.$$

§ **99.** — Propriétés :

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{\lambda_1 \cos\varphi}{t^2 \cos^2 l} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos^2 l}, \qquad q' = \frac{\pi t}{4} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos l}, \qquad p = \frac{t}{\lambda_1} \cos l,$$

$$q = -\frac{\lambda t}{\lambda_1} \cdot \sin l \cdot \frac{dl}{d\varphi} = -\frac{\lambda t}{\lambda_1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin l}{\cos^2 l} \cdot \cos\varphi.$$

$$4\operatorname{tg}^2\omega = -2 + \frac{\pi^2 t^2}{16} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 l} + \frac{16}{\pi^2 t^2} \cdot \frac{\cos^2 l}{\cos^2\varphi} + \frac{\lambda^2}{t^2} \cdot \frac{\sin^2 l}{\cos^4 l} \cdot \cos^2\varphi.$$

La déformation est constante tout le long de l'équateur. Elle est donnée par

$$m_m = \frac{p}{\cos\varphi} = \frac{4}{\pi t} \cdot \frac{\cos l}{\cos\varphi} = \frac{4}{\pi t}.$$

Elle est nulle en un seul point du méridien central déterminé par

$$m_m = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\cos l}{\cos \varphi}\right)_1 = \frac{\pi l}{4}.$$

Le conjugué de l'équateur a pour latitude φ_2 déterminé par

$$m_m = \frac{\pi l}{4}, \qquad \text{d'où} \quad \left(\frac{\cos l}{\cos \varphi}\right)_2 = \frac{\pi^2 l^2}{16}.$$

La carte qui représente toute la surface terrestre est une ellipse dont les axes sont

$$y' = l, \qquad x' = \frac{l}{\lambda_1} \times \lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = \pi = \frac{\pi l}{\lambda_1}.$$

Le rapport des axes est

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\pi}{\lambda_1}.$$

Exemples :

I. $\lambda_1 = 75^\circ = \dfrac{4}{\pi}$, $\qquad \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{\pi^2}{4} = 2.46.$

II. $\lambda_1 = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$, $\qquad \dfrac{x'}{y'} = 2.$

C'est la carte de Mollweide-Babinet.

III. $\lambda_1 = 180^\circ = \pi$, $\qquad \dfrac{x'}{y'} = 1.$

Toute la surface de la terre est représentée par un cercle.

Sixième classe. — Formules pour le changement de variables.

§ 100. — Soit donnée une carte $\rho = f(\lambda, z)$, $\theta = f(\lambda, z)$. Posons

$$M = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}, \qquad N = \frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad R = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}, \qquad S = \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Étant donnés le pôle A et l'axe AO (fig 13), choisissons pour axe des x une perpendiculaire à AO à la distance ρ_1.

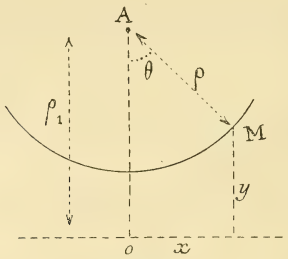


Fig. 13.

L'axe des y sera l'axe AO.
Les formules de transformation sont

$$x = \rho \sin \theta, \qquad y = \rho_1 - \rho \cos \theta.$$

Les dérivées $pqp'q'$ se calculent comme suit :

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \mathrm{M} + \frac{\partial x}{\partial \rho} \cdot \mathrm{R}$$

$$= \rho \cos \vartheta \,.\, \mathrm{M} + \sin \theta \,.\, \mathrm{R},$$

de même

$$-q = \frac{\partial x}{\partial z} = \rho \cos \theta \,.\, \mathrm{N} + \sin \theta \,.\, \mathrm{S}$$

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \sin \theta \,.\, \mathrm{M} - \cos \theta \,.\, \mathrm{R}$$

$$-q' = \frac{\partial y}{\partial z} = \rho \sin \theta \,.\, \mathrm{N} - \cos \theta \,.\, \mathrm{S}.$$

L'échelle de superficie se calcule par

$$\frac{1}{\cos \varphi}[pq' - p'q] = \frac{1}{\sin z}[-\mathrm{N.R} + \mathrm{MS}]\rho.$$

CHAPITRE IX

Cartes à parallèles circulaires et concentriques.

La condition d'avoir des parallèles circulaires et concentriques s'exprime par ρ indépendant de λ, d'où

$$\rho = f(z) \quad \text{et} \quad R = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = 0.$$

Carte orthomorphe.

§ 101. — L'orthomorphie exige un réseau orthogonal. Mais si les parallèles sont circulaires et concentriques, les méridiens, pour les couper orthogonalement, doivent être rectilignes et issus du centre commun des parallèles. Nous sommes donc ramenés aux cartes de la quatrième classe (tronconiques).

Pour le démontrer algébriquement, traduisons les formules de l'orthomorphie

$$p - q' \sin z = 0,$$
$$p' + q \sin z = 0.$$

Il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\rho}{\sin z} M \cos \theta = \rho N \sin \theta - S \cos \theta, \\ \dfrac{\rho}{\sin z} M \sin \theta = -\rho N \cos \theta - S \sin \theta. \end{cases}$$

Ces deux équations se transforment en

$$\begin{cases} N = 0, \\ \dfrac{\rho}{\sin z} M = -S \end{cases}$$

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

indique des méridiens rectilignes et convergents.

La condition

$$\frac{\rho}{\sin z}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=-\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

indique que $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$ ne dépend que de z, mais $\frac{d\theta}{dz}=0$; donc θ est proportionnel à λ.

Ce sont bien les caractéristiques de la quatrième classe.

Cartes authaliques.

§ **102.** *Théorème I.* — L'authalisme s'exprime par

$$\sin z=\rho\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$

En effet, nous avons vu que l'échelle de superficie a pour valeur

$$\frac{\rho}{\sin z}\,[\mathrm{MS}-\mathrm{NR}].$$

Pour la sixième classe, $\mathrm{R}=0$.

Indiquons que l'échelle de superficie vaut 1; il vient

$$\sin z=\rho\mathrm{MS}.$$

Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer directement :

Sur la sphère un élément de surface a pour dimensions

$$dz \quad\text{et}\quad d\lambda\times\text{rayon du parallèle}=d\lambda\sin z.$$

Sur la carte, l'élément correspondant a pour dimensions

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}dz \quad\text{et}\quad \rho\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}d\lambda.$$

L'authalisme s'exprime en égalant les produits des dimensions

$$\sin z.\,d\lambda.\,dz=\frac{\partial\rho}{\partial z}.\,dz.\,\rho.\,\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}d\lambda.$$

§ 103. *Théorème II.* — De l'équation ci-dessus, on tire

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \sin z \cdot \frac{1}{\rho\,\dfrac{\partial\rho}{\partial z}};$$

donc $\dfrac{\partial\theta}{\partial\lambda}$ ne dépend que de z; donc θ est proportionnel à λ.

L'intégration donne ensuite

$$\theta = \lambda \cdot \frac{\sin z}{\rho\,\dfrac{\partial\rho}{\partial z}} + \text{fonction arbitraire de } z.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème : Les cartes authaliques de la sixième classe ont pour caractéristique θ proportionnel à λ. Le choix est arbitraire de la fonction qui définit ρ.

§ 104. *Théorème III.* — Si le système

$$\rho = f(z), \qquad \theta = \lambda\psi(z)$$

est authalique, le système

$$\rho = kf(z), \qquad \theta = \frac{1}{k^2}\lambda\psi(z)$$

est authalique et il a la même échelle de superficie.

En effet, dans la formule

$$\frac{\rho}{\sin z} = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z},$$

l'introduction du facteur k a pour résultat que deux facteurs sont multipliés par k et le troisième facteur est multiplié par $\frac{1}{k^2}$. Le produit ne change donc pas de valeur.

Ce théorème était évident *a priori,* car l'introduction du facteur k a pour effet d'allonger ρ et de refermer d'autant les angles θ; donc la superficie n'est pas changée et l'authalisme subsiste.

Carte de Boone, VI_1.

§ **105.** — Le choix nous est laissé de la fonction qui définit ρ.

Posons arbitrairement $\rho = k + z$. Les parallèles sont équidistants. C'est la carte de Boone. Il vient

$$\theta = \lambda \frac{\sin z}{\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}} = \lambda \frac{\sin z}{k + z}.$$

Propriétés :

$$p = \cos\theta - \sin z,$$

$$-q = \sin\theta + \cos\theta \left[\cos z - \frac{\sin z}{k + z}\right]\lambda,$$

$$p' = \sin\theta - \sin z,$$

$$-q' = -\cos\theta + \sin\theta \left[\cos z - \frac{\sin z}{k + z}\right]\lambda.$$

$$m_p = \frac{1}{\sin z}\sqrt{p^2 + p'^2} = 1.$$

Donc tous les parallèles sont à l'échelle 1.

$$m_m^2 = q^2 + q'^2 = 1 + \lambda^2 \left[\cos z - \frac{\sin z}{k + z}\right]^2,$$

$$2\,\mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{\mathrm{L}} = \lambda \left[\cos z - \frac{\sin z}{k + z}\right].$$

C'est l'équation d'une équidéformée; elle a la forme d'une astroïde.

L'indicatrice est circulaire pour $\omega = 0$, d'où

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \mathrm{tg}\, z = k + z. \end{cases}$$

donc elle est circulaire :

1° Le long du nul méridien ;

2° Le long du parallèle z_3 défini par

$$\mathrm{tg}\, z_3 = k + z_3, \qquad \rho_3 = \mathrm{tg}\, z_3.$$

§ **106.** Applications numériques. — I. Soit

$$z_3 = 45° \text{ et } \omega = 5°40', \text{ d'où } 2\,\mathrm{tg}\,\omega = 0.197,\ \mathrm{tg}^2\,T = 1.105.$$

Cherchons à quelle longitude l'équidéformée coupe les latitudes 20° et 70° (fig. 14).

Il vient

$$\lambda_1 = 54°,\quad \lambda_2 = 36°1.$$

Nous pouvons donc former un trapèze curviligne dont la hauteur est 50° et la largeur moyenne $70° \times 0.707 = 49°5$.

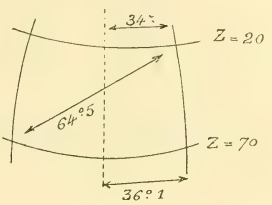


Fig. 14.

Cette figure est à peu près carrée. La diagonale mesure 64°5 calculée par cos diag = cos 20 . cos 70 + sin 20 . sin 70 . cos 70°1.

Une carte azimutale ayant pour diagonale 64°5 donnerait

$$\mathrm{tg}^2\,T = 1.042.$$

Une carte azimutale qui aurait à la bordure $\mathrm{tg}^2\,T = 1.105$ aurait pour diamètre 102° au lieu de 64°5.

II. Soit

$$k = 0.262 = \frac{\pi}{12}.$$

Calculons quelques points de l'équidéformée

$$2\,\mathrm{tg}\,\omega = 0.707 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

z	λ	z	λ	z	λ
15	86	85	81	135	41 5
30	178	90	74.5	150	39.5
60	253	105	56.5	165	39
75	114	120	47		

§ 107. — Cas limites :

Pour $k = \infty$, $2 \operatorname{tg} \omega = \lambda \cos z = \lambda \sin \varphi$,

c'est la carte de Flamsteed ;

pour $k = 0$, $\theta = \lambda \cdot \dfrac{\sin z}{z}$, $z_3 = 0$,

c'est la carte de Werner.

Déformations locales :

La déformation est donnée par la formule

$$2 \operatorname{tg} \omega = \lambda \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right].$$

Application numérique : Soit $\omega = 19°30'$.

L'équidéformée entoure une portion de la surface sphérique qui vaut 26 % du globe (fig. 15).

Elle coupe le méridien 180° à la colatitude 49°.

Elle coupe l'équateur à la longitude $1.11 = 68°$.

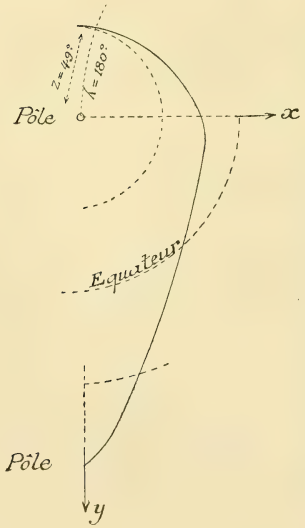


Fig. 15.

Ci-dessous les coordonnées géographiques (λ et z) et les coordonnées cartographiques de quelques points de ce contour :

λ	z	x	y
3.14	49	0.32	— 0 79
2.50	55	0.81	— 0 515
2 07	60	1.04	— 0.146
1.65	70	1.17	0.355
1.475	75	1.15	0.61
1.33	80	1.13	0.82
1.11	90	1.02	1.19
0 90	105	0 83	1.63
0 78	119	0.67	1.96
0.67	150	0.335	2.60

CHAPITRE X

Septième classe. — Cartes à deux axes de symétrie.

§ 108. — Soit à dresser la carte d'une région où nous avons tracé deux orthodromies perpendiculaires comme axes de symétrie.

L'une de ces orthodromies sera considérée comme équateur, l'autre comme méridien origine. Ces deux axes seront représentés sur la carte par deux droites rectangulaires qui seront les axes de coordonnées.

A cause de la symétrie, quand φ change de signe, y change de signe sans changer de valeur; donc y est une fonction impaire de φ. Mais quand λ change de signe, y ne change pas; donc y est une fonction paire de λ

La fonction x doit avoir des propriétés analogues.

Si x et y sont développés en série, y contient

$$\varphi \quad \varphi^3 \quad \varphi^5 \quad \lambda^2 \quad \lambda^4 \quad \lambda^6.$$

Donc

$p' = \dfrac{dy}{d\lambda}$ contient $\varphi \quad \varphi^3 \quad \varphi^5 \quad \lambda \quad \lambda^3 \quad \lambda^5$, fonction impaire,

$q' = \dfrac{dy}{d\varphi}$ $\varphi^0 \quad \varphi^2 \quad \varphi^4 \quad \lambda^2 \quad \lambda^4 \quad \lambda^6$, fonction paire.

De même x contient

$$\varphi^2 \quad \varphi^4 \quad \varphi^6 \quad \lambda \quad \lambda^3 \quad \lambda^5,$$

d'où

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \text{fonction paire,}$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{fonction impaire.}$$

Carte orthomorphe.

§ **109.** — Les conditions de l'orthomorphie sont

$$p = q' \cos\varphi,$$
$$p' = -q \cos\varphi.$$

Remarquant que $\cos\varphi$ est une fonction paire, il vient

$$p = q' \cos\varphi, \qquad \text{paire} = \text{paire} \times \text{paire},$$
$$p' = -q \cos\varphi, \qquad \text{impaire} = \text{impaire} \times \text{paire}.$$

La seconde condition est impossible à remplir, sauf si

$$p' = 0, \quad q = 0, \quad \text{alors} \quad y = f(\varphi), \quad x = f(\lambda);$$

c'est la carte de Mercator, I_1

§ **110.** — Substituons à φ la variable u définie par

$$du = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

d'où

$$u = \log \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Quand φ change de signe, u devient

$$\log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) = \log \operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = -\log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

donc u change aussi de signe.

u a la même parité que φ. Nous pouvons poser

$$y = [A_1 u + A_3 u^3 + A_5 u^5 + \ldots] + \lambda^2 [B_1 u + B_3 u^3 + \ldots] + \lambda^4 [C_1 u + C_3 u^3] + \lambda^6 \ldots$$
$$x = \lambda [a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots] + \lambda^3 [b_0 + b_2 u^2 + \ldots] + \lambda^5 [c_0 + c_2 u^2 \ldots] + \lambda^7 \ldots$$

La première des deux conditions de l'orthomorphie est

$$p + Q' = 0.$$

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = [a_0 + a_2 u^2 + \ldots] + 3\lambda^2 [b_0 + \ldots] + 5\lambda^4 [c_0 + \ldots] + 7\lambda^6 \ldots$$

$$Q' = \frac{\partial y}{\partial u} = [A_1 + 3A_3 u^2 + 5A_5 u^4 \ldots] + \lambda^2 [B_1 + 3B_3 u^2 + \ldots] + \lambda^4 [C_1 + \ldots].$$

Cette égalité doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs de λ et u.

Il faut donc égaler les coefficients des mêmes termes en λ et u.

$a_0 + A_1 = 0$	$3b_0 + B_1 = 0$	$5c_0 + C_1 = 0$	$7d_0 + D_1 = 0$
$a_2 + 2A_3 = 0$	$3b_2 + 3B_3 = 0$	$5c_2 + 3C_3 = 0$	$7d_2 + 3D_3 = 0$
$a_5 + 5A_5 = 0$	$3b_4 + 5B_5 = 0$	$5c_4 + 5C_5 = 0$	
$a_6 + 7A_7 = 0$	$3b_6 + 7B_7 = 0$		
(I)	(II)	(III)	(IV)

De même, l'équation $p' = Q$ se calcule ainsi :

$$Q = \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda [2a_2 u + 4a_4 u^3 + 6a_6 u^5] + \lambda^3 [2b_2 u + 4b_4 u^3 + \ldots] + \lambda^5 [2c_2 u + \ldots]$$

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 2\lambda [B_1 u + B_3 u^3 + B_5 u^5 \ldots] + 4\lambda^3 [C_1 u + C_3 u^3 + \ldots] + 6\lambda^5 [D_1 u + \ldots]$$

d'où, en égalant les coefficients des mêmes puissances :

$2a_2 = 2B_1$	$2b_2 = 4C_1$	$2c_2 = 6D_1$	$2d_2 = 8E_1$	$2e_2 = 10F_1$
$4a_4 = 2B_3$	$4b_4 = 4C_3$	$4c_4 = 6D_3$	$4d_4 = 8E_3$	
$6a_6 = 2B_5$	$6b_6 = 4C_5$	$6c_6 = 6D_5$		
$8a_8 = 2B_7$				
(V)	(VI)	(VII)	(VIII)	(IX)

Les équations

I II III IV V VI VII

donnent les relations qui lient les huit séries

A *a* B *b* *c* C D *d*.

Donc le choix est arbitraire de l'une des séries de coefficients.

Si nous voulons exprimer tous les coefficients en fonction de l'une des séries, la série A par exemple, il vient

$$
\begin{array}{llll}
a_0 = -A_1 & & & \\
a_2 = -5A_3 & B_1 = -5A_3 & b_0 = +\frac{1}{3}5\cdot A_5 & \\
a_4 = -5A_5 & B_3 = -\frac{4}{2}\cdot 5A_5 & b_2 = +\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{1}\cdot A_5 & C_1 = \frac{2}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{1}\cdot A_5 \\
a_6 = -7A_7 & B_5 = -\frac{6}{2}\cdot 7A_7 & b_4 = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{7}{1}\cdot A_7 & C_3 = \frac{4}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{7}{1}\cdot A_7 \\
a_8 = -9A_9 & B_7 = -\frac{8}{2}\cdot 9A_9 & b_6 = \frac{7}{3}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{9}{1}\cdot A_9 & C_5 = \frac{6}{4}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{9}{1}\cdot A_9 \\
 & & & C_7 = \frac{8}{4}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{11}{1}\cdot A_{11}
\end{array}
$$

etc.

Remarque : Se fixer la série A, c'est se donner la valeur de y pour $\lambda = 0$; autrement dit, c'est fixer la loi suivant laquelle les parallèles coupent le nul méridien.

Carte authalique.

§ **111.** — La condition de l'authalisme est

$$\cos\varphi = pq' - p'q,$$

ou

$$\text{fonction paire} = \text{paire} \times \text{paire} - \text{impaire} \times \text{impaire}.$$

Cette condition est possible à remplir.

Pour pouvoir aisément faire un produit de dérivées, nous mettrons les séries sous la forme

$$x = [A_1\lambda + A_3\lambda^3 + A_5\lambda^5 + \ldots] \times [B_0 + B_2\varphi^2 + B_4\varphi^4 + \ldots],$$

que nous écrirons sous la forme abrégée

$$x = A(\lambda) \times B(\varphi),$$

de même

$$y = [C_0 + C_2\lambda^2 + C_4\lambda^4 + \ldots] \times [D_1\varphi + D_3\varphi^3 + D_5\varphi^5 + \ldots],$$

avec la notation

$$y = C(\lambda) \times D(\varphi).$$

Les dérivées sont

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = A'(\lambda) \times B(\varphi),$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = A(\lambda) \times B'(\varphi),$$

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = C'(\lambda) \times D(\varphi),$$

$$q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = C(\lambda) \times D'(\varphi).$$

Les parités de ces fonctions sont

paires :	$B(\varphi)$,	$C(\lambda)$,	$A'(\lambda)$,	$D'(\varphi)$;
impaires :	$A(\lambda)$,	$D(\varphi)$,	$B'(\varphi)$,	$C'(\lambda)$

Quand la variable s'annule, les fonctions impaires s'annulent; les fonctions paires ne s'annulent pas.

§ 112. — La condition de l'anthalisme est

$$\cos\varphi = A'BCD' - C'DAB'.$$

Donnons aux variables λ et φ des valeurs particulières.

I. $\lambda = o$. A et C' s'annulent; il reste

$$\cos\varphi = A'(o)\ B(\varphi)\ C(o)\ D'(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

II. $\varphi = o$. D et B' s'annulent; il reste

$$\cos o = A'(\lambda)\ B(o)\ C(\lambda)\ D'(o) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Calculons ensuite les valeurs

$$A'(o) = A_1,$$
$$C(o) = C_0,$$
$$B(o) = B_0,$$
$$D'(o) = D_1.$$

Les équations (I) et (II) deviennent

$$\text{(I).} \qquad \cos\varphi = A_1C_0 \times B(\varphi) \times D'(\varphi)$$

$$\text{(II).} \qquad 1 = B_0D_1 \times A'(\lambda) \times C(\lambda),$$

ou

$$\text{(I).} \quad \begin{cases} 1 - \dfrac{\varphi^2}{2} + \dfrac{\varphi^4}{24} + \cdots \\ = A_1C_0(B_0 + B_2\varphi^2 + B_4\varphi^4 + \cdots)(D_1 + 3D_3\varphi^2 + 5D_5\varphi^4 + \cdots); \end{cases}$$

$$\text{(II).} \quad 1 = B_0D_1(A_1 + 3A_3\lambda^2 + 5A_5\lambda^4 + \cdots)(C_0 + C_2\lambda^2 + C_4\lambda^4 + \cdots).$$

Égalons les coefficients des mêmes puissances, il vient

$$\text{I.} \quad \begin{cases} 1 = A_1C_0B_0D_1 \\ -\dfrac{1}{2} = A_1C_0[B_2D_1 + 3D_3B_0] \\ +\dfrac{1}{24} = A_1C_0[B_4D_1 + 3B_2D_3 + 5B_0D_5] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} 0 = 3A_3C_0 + A_1C_2 \\ 0 = 5A_5C_0 + 3A_3C_2 + A_1C_4 \\ 0 = 7A_7C_0 + 5A_5C_2 + 3A_3C_4 + A_1C_6 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Soit n équations à $(2n + 2)$ variables.

Nous avons donc le choix arbitraire de deux des quatre fonctions A, B, C, D.

Carte de Lagrange VII$_1$.

§ 113. — Lagrange se propose de construire une carte orthomorphe où les parallèles et les méridiens soient représentés par des cercles.

A cause de l'orthomorphie, chaque pôle est représenté par un point, et les méridiens forment un faisceau de cercles ayant pour corde commune la ligne des pôles; soit 2A la distance des pôles. A cause de l'orthomorphie, les parallèles coupent ortho-

gonalement les méridiens; donc les parallèles forment un faisceau conjugué au faisceau des méridiens et ayant pour corde commune une perpendiculaire au milieu de la ligne des pôles, et de longueur $2A\sqrt{-1}$.

§ **114.** — Choisissons pour axe des y la ligne des pôles; elle représentera le nul méridien; et pour axe des x la perpendiculaire au milieu de la ligne des pôles; elle représentera un des cercles de latitude.

Recherchons les deux équations qui lient x et y à λ et u, en nous servant des deux relations $p' = Q$, $p = -Q'$.

Nous introduirons quatre variables auxiliaires : R, D, θ, ρ.

R est le rayon d'un méridien de la carte et D est l'abscisse de son centre; $R^2 = A^2 + D^2$. R et D ne dépendent que de λ. Un cercle méridien a pour équation

$$R^2 = y^2 + (x + D^2) \qquad \text{ou} \qquad A^2 = x^2 + y^2 + 2Dx. \qquad (1)$$

Par analogie, ρ est le rayon d'un parallèle de la carte et θ est l'ordonnée de son centre :

$$\theta^2 = A^2 + \rho^2.$$

Un parallèle a pour équation

$$\rho^2 = x^2 + (\theta - y)^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2\theta y + A^2 = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) résolues par rapport à x et y donnent

$$x = A^2 \frac{\rho}{\rho D + R\theta}, \qquad y = A^2 \frac{R}{\rho D + R\theta} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

§ **115.** — Calculons les dérivées

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Quand on dérive par rapport à λ, R et D sont seuls affectés; de plus, à cause de $R^2 = A^2 + D^2$, on a

$$R\,dR = D\,dD.$$

De même, quand on dérive par rapport à u, θ et ρ sont seuls affectés et à cause de $\theta = A^2 + \rho^2$, on a

$$\theta d\theta = \rho d\rho.$$

On obtient ainsi (en omettant les facteurs communs aux quatre dérivées caractéristiques) :

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\rho}{R}(\theta D + \rho R) \cdot \frac{dD}{d\lambda}, \qquad Q = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{du},$$

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{dD}{d\lambda}. \qquad Q' = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{R}{\rho} \cdot (\theta D + \rho R) \frac{d\theta}{du}.$$

La première condition de l'orthomorphie, $p' = Q$, donne

$$R^2 \frac{d\theta}{du} = \rho^2 \cdot \frac{dD}{d\lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La deuxième condition, $p = -Q'$, donne le même résultat.

Ainsi les deux conditions conduisent à une seule relation; cela provient de ce que nous avons déjà introduit dans les calculs la condition de l'orthogonalité, qui est une caractéristique de l'orthomorphie.

L'équation finale (4) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{dD}{d\lambda}.$$

Le premier membre ne dépend que de u; le second ne dépend que de λ; ces deux quantités ne peuvent être égales que si elles sont constantes; on a donc deux relations :

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{dD}{d\lambda} = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\theta}{du} = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

§ **116.** — Pour intégrer l'équation (5), considérons l'angle $2b$, sous lequel on voit du centre d'un méridien la distance des pôles; il vient

$$\operatorname{tg} b = \frac{A}{D}, \qquad \text{d'où} \qquad db = \frac{1}{R^2} \cdot dD.$$

L'équation (5) devient

$$db = h d\lambda, \qquad \text{d'où} \qquad b = h\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

La constante d'intégration est nulle afin que b s'annule en même temps que λ. On tire de là

$$R = \frac{A}{\sin h\lambda}, \qquad D = \frac{A}{\operatorname{tg} h\lambda}.$$

Pour $h\lambda = 90^\circ$, le méridien est le cercle ayant pour diamètre la ligne des pôles.

§ **117.** — Pour intégrer l'équation (6), considérons l'angle 2S, sous lequel on voit du centre du parallèle le cercle ayant pour diamètre la ligne des pôles. Il vient

$$\operatorname{tg} S = \frac{A}{\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dS}{\cos S} = \frac{d\theta}{\rho^2}.$$

L'équation (6) devient

$$h du = h \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dS}{\cos S}, \qquad \text{d'où} \qquad e^{hu} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)^h. \quad (8)$$

Nous obtiendrons une formule plus homogène en considérant l'angle ω imaginaire, sous lequel on voit du centre du parallèle la corde $A\sqrt{-1}$ commune à tous les parallèles; il vient ainsi

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{Ai}{\rho},$$

analogue à

$$\operatorname{tg} b = \frac{A}{D}.$$

Il vient alors

$$d\omega = i \frac{d\theta}{\rho^2},$$

et l'équation (6) devient

$$h du = \frac{d\omega}{i}, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = hiu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

analogue à (7).

On tire de là

$$\rho = \frac{Ai}{\sin\omega}, \qquad \theta = \frac{Ai}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Les équations (5) prennent la forme

$$x = \frac{\sin b}{\cos b + \cos\omega}, \qquad y = \frac{i\sin\omega}{\cos b + \cos\omega},$$

$$x + iy = \frac{\sin b - \sin\omega}{\cos b + \cos\omega} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-\omega) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}h(\lambda - iu),$$

$$x - iy = \operatorname{tg}\frac{1}{2}h(\lambda + iu).$$

§ **118.** — L'intégration de l'équation (6) peut se faire par une troisième méthode, en considérant que tout cercle de latitude est le lieu des points tels que le quotient des distances aux deux pôles est constant.

En effet, les distances de x, y aux deux pôles sont :

$$\delta_1^2 = x + (A - y)^2,$$
$$\delta_2^2 = x + (A + y)^2.$$

Tenant compte de l'équation du cercle :

$$x^2 + (y - \theta)^2 = \rho^2 = \theta^2 - A^2,$$

il vient

$$\delta_1^2 = 2\theta y - 2Ay, \qquad \delta_2^2 = 2\theta y + 2Ay,$$

d'où

$$\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 = \frac{\theta - A}{\theta + A}.$$

Soit n ce quotient :

$$n^2 = \frac{\theta - A}{\theta + A}, \quad \text{d'où} \quad \theta = A\frac{1+n^2}{1-n^2}, \quad \rho = A\frac{2n}{1-n^2}.$$

En dérivant

$$d\theta = A\frac{4n}{(1-n)^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta}{\rho^2} = \frac{dn}{n},$$

l'équation (6) devient

$$h\,du = \frac{dn}{n}, \qquad \text{d'où} \qquad n = e^{hu}.$$

Les trois variables auxiliaires n, S, ω sont liées par

$$n = e^{hu} = e^{-i\omega} = \cos\omega - i\sin\omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{S}{2}\right).$$

Les équations de la carte sont alors

$$x = \frac{2\sin b}{\frac{1}{n} + n + 2\cos b}, \qquad y = \frac{\frac{1}{n} - n}{\frac{1}{n} + n + 2\cos b}.$$

La variable u est définie par

$$du = \frac{dz}{\sin z},$$

où z représente la colatitude; il vient donc

$$n = \text{constante} \times \operatorname{tg}^h \frac{1}{2} z.$$

Ainsi la carte de Lagrange contient deux paramètres. Le premier peut se mettre sous une autre forme.

Considérons le parallèle représenté sur la carte par la perpendiculaire au milieu de la ligne des pôles; soit z_0 sa colatitude. Pour ce parallèle, on a

$$n = 1, \qquad \text{donc} \qquad 1 = \text{constante} \times \operatorname{tg}^h \frac{1}{2} z_0.$$

Introduisant cette valeur de la constante, on obtient

$$n = \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2} z}{\operatorname{tg}\frac{1}{2} z_0}\right)^h.$$

§ 119. Propriétés des cartes de Lagrange. — La carte étant orthomorphe, il suffit de calculer m, qui est donné par la formule

$$m\cos\varphi = \sqrt{p^2 + p'^2}.$$

On obtient

$$m\cos\varphi = \frac{2h}{n + \frac{1}{n} + 2\cos b}$$

$$= \frac{h}{\cos\omega + \cos b}$$

$$= \frac{h}{2\cos\frac{1}{2}h(\lambda - iu)\cos\frac{1}{2}h(\lambda + iu)}.$$

Le minimum de m se trouve sur le nul méridien.

Ce minimum a lieu à une latitude z_1 calculée en égalant à zéro la dérivée en z.

Il vient

$$m = \frac{1}{\sin z}\cdot\frac{2h}{n + \frac{1}{n} + 2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{m}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{1}{m}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{1}{m}\right)}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial z} = \left(n - \frac{1}{n}\right)h + \cos z\left(n + \frac{1}{n} - 2\right).$$

En égalant à zéro, on obtient la relation

$$\cos z_1 = h\frac{1 - n_1}{1 + n_1} \quad . \quad . \quad (10) \qquad \text{ou} \qquad n_1 = \frac{h - \cos z_1}{h + \cos z_1} \quad . \quad . \quad (11)$$

§ **120.** Détermination des paramètres de la carte. — Lagrange choisit dans la région à représenter un point qu'il dénomme « point principal ».

Il s'impose :

1° Que l'échelle linéaire soit minimum pour ce point; en conséquence, le méridien de ce point sera le méridien central et sa latitude z_1 doit satisfaire à l'équation (10);

2° Que la dérivée seconde de m s'annule pour le point principal.

$$\frac{\partial^2}{\partial z}\left(\frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)h\frac{dn}{dz} + \cos z\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{dn}{dz} - \sin z\left(n + \frac{1}{n} - 2\right)$$

$$= \left(n + \frac{1}{n}\right)\frac{h^2}{\sin z} + \left(n - \frac{1}{n}\right)h\frac{\cos z}{\sin z} - \sin z\left(n + \frac{1}{n} - 2\right)$$

Égalons à zéro et introduisons la valeur

$$\cos z_1 = h\,\frac{1 - n_1}{1 + n_1}$$

il vient

$$h^2 = \frac{(1 + n_1)^2}{1 + n_1^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Les relations (10) et (12) donnent

$$h = 1 + \sin^2 z_1,$$

ce qui détermine le paramètre h.

D'autre part,

$$\frac{h - \cos z_1}{h + \cos z_1} = n_1 = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} z_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} z_0}\right)^h.$$

Cette relation détermine le deuxième paramètre z_0.

Cartes polyconiques.

§ **121.** — Les parallèles sont des cercles dont le rayon se calcule par la remarque suivante :

Si l'on développe sur un plan une zone sphérique comprise entre les latitudes z et $(z + a)$, elle affecte une courbure qui se détermine comme suit :

Soient deux segments de méridiens AC, BE; ils se coupent sur la carte en un point D (fig. 16). AC $= a$.

AB est proportionnel à $\sin z$.

CE est proportionnel à $\sin(z + a)$.

$$\frac{DC}{DA} = \frac{CE}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(z + a)}{\sin z}.$$

$$\frac{DA + a}{DA} = \frac{\sin(z + a)}{\sin z}.$$

Soit $a = \infty^1$ petit $= dz$.

$$\frac{DA + dz}{DA} = \frac{\sin(z + dz)}{\sin z}.$$

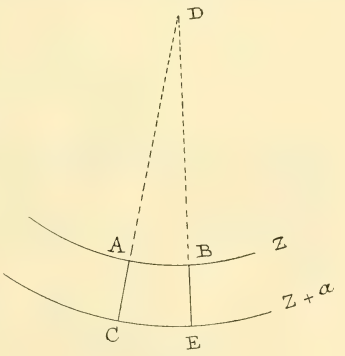


Fig. 16.

$$\frac{dz}{DA} = \frac{\sin(z + dz) - \sin z}{\sin z} \quad \text{ou} \quad \frac{d \sin z}{\sin z},$$

d'où

$$DA = \frac{\sin z}{\frac{d \sin z}{dz}} = \operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} \varphi.$$

§ 122. — Les projections polyconiques se définissent comme suit :

Axes de symétrie : nul méridien et équateur. Les parallèles sont des arcs de cercle ayant leur centre sur le nul méridien et ayant pour rayon $\operatorname{cotg} \varphi$; le nul méridien a pour équation $y = \varphi$.

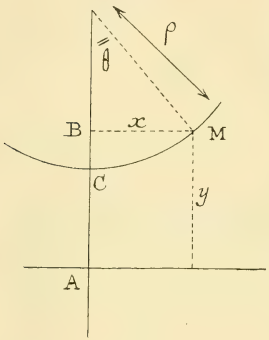


Fig. 17.

Donc (fig. 17) :

$$AC = \varphi, \quad \rho = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Si l'on prend les coordonnées ρ et θ, elles se calculeront par les deux relations :

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = AC + BC = \varphi + \rho(1 - \cos \theta).$$

Carte polyconique américaine VII_2.

§ 123. — La condition imposée en plus est que les parallèles soient à la même échelle linéaire que le nul méridien. (Échelle = 1.)

Sur la sphère, un arc de parallèle d'amplitude λ^o a pour longueur

$$2\pi \cos \varphi \times \frac{\lambda}{360^o} = \lambda \cos \varphi.$$

Sur la carte, il a pour longueur $\rho \times \theta$.

En égalant ces deux valeurs, il vient

$$\rho \times \theta = \lambda \cos \varphi \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} \varphi \times \theta = \lambda \cos \varphi \quad \text{ou} \quad \theta = \lambda \sin \varphi.$$

Les équations de la carte sont donc

$$x = \rho \sin \theta, \quad y = \varphi + \rho(1 - \cos \theta), \quad \theta = \lambda \sin \varphi, \quad \rho = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Carte polyconique anglaise VII_3.

§ 124. — Les conditions imposées sont : 1° un réseau orthogonal ; 2° un équateur à la même échelle que le nul méridien.

Le réseau orthogonal exige $pq + p'q' = 0$.

Calculons les dérivées :

De $x = \rho \sin \theta$, on tire

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda},$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}.$$

De $y = \varphi + \rho - \rho \cos \theta$, on tire

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \sin \theta \frac{d\theta}{d\lambda},$$

$$q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 + (1 - \cos \theta) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}.$$

Remplaçons dans $pq + p'q' = 0$, il vient

$$\rho \frac{d\theta}{d\varphi} + \sin \theta \left[1 + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right] = 0.$$

Tenant compte de $\rho = \operatorname{cotg} \varphi$, on a

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \sin \theta \operatorname{cotg} \varphi.$$

En intégrant

$$\lg \frac{\theta}{2} = \sin \varphi \times \text{c}^{\text{te}} = k \sin \varphi.$$

La constante d'intégration se calcule par la condition que l'équateur a pour équation $x = \lambda$.

Dans $x = \rho \sin \theta$, remplaçons θ par sa valeur

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi,$$

il vient

$$x = \frac{2k \cos \varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Sur l'équateur,

$$x = 2k, \qquad \text{d'où} \qquad k = \frac{1}{2}\lambda.$$

Les équations de la carte sont donc

$$x = 4\lambda \frac{\cos \varphi}{4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}, \qquad y = \varphi + \lambda^2 \frac{\sin 2\varphi}{4 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

CHAPITRE XI

Théorie générale des cartes authaliques.

§ 125. — L'échelle de superficie est constante; pour la facilité des calculs, nous avons fait $S = 1$. On peut construire un globe terrestre ayant la même superficie que celle de la carte.

En chaque point de la carte, il est un orientement tel que l'échelle linéaire est la même que celle du globe; on l'appelle isopérimètre. (Tissot.)

L'équation de l'indicatrice étant $m^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$, cherchons la valeur de t qui donne $m = 1$. Il vient $\operatorname{tg}^2 t = a^2$.

Mais on a la formule $\operatorname{tg}^2 T = a^2$. Donc l'orientement isopérimètre est celui qui donne la plus grande altération d'angle.

Rappelons que l'angle T' de la carte est la projection de l'angle T du globe et que $T + T' = 90°$.

Si sur une carte authalique on trace une famille d'isopérimètres, elles forment un quadrillage de losanges où l'angle aigu vaut $2T'$ (fig. 18).

Si l'on dessine sur le globe les lignes que ces isopérimètres

Fig. 18.

représentent, elles formeront un quadrillage de losanges ayant pour angle analogue 2T.

Mais $2T + 2T' = 180^\circ$.

Donc les losanges du globe sont identiques à ceux de la carte, mais ils sont orientés en sens perpendiculaires.

Cette remarque (de Tissot) est sans aucune conséquence pratique.

§ 126. *Théorème I.* — Si le système $x = f(\lambda, \varphi)$, $y = \psi(\varphi, \lambda)$ est authalique, le système

$$x = f(\varphi, \lambda)\frac{1}{k}, \quad y = k\psi(\lambda, \varphi)$$

est aussi authalique, k étant une constante indépendante de φ et de λ.

En effet, à cause de l'authalisme du premier système, on a

$$\cos\varphi = pq' - p'q.$$

Pour le second système, les dérivées p' et q' sont multipliées par k, les dérivées p et q sont multipliées par $\frac{1}{k}$. Donc le produit $pq' - p'q$ ne change pas.

Le théorème était évident *a priori ;* car l'introduction du coefficient k consiste à allonger la figure dans le sens des x et à la raccourcir d'autant dans le sens des y. L'authalisme subsiste et l'échelle de superficie n'est pas changée.

§ 127. *Théorème II.* — Après s'être imposé la condition de l'authalisme, on peut encore choisir arbitrairement la fonction

qui définit x ou y; et il reste encore des constantes arbitraires d'intégration.

En effet, soit choisi arbitrairement $x = f(x, y)$. Alors p et q sont connus; et les remplaçant dans $\cos\varphi = pq' - p'q$, il reste à résoudre

$$p\frac{dy}{d\varphi} - q\frac{dy}{d\lambda} = \cos\varphi, \text{ d'où } y = \int \frac{\cos\varphi}{p}\, d\varphi + \text{fonction arbitraire de } x.$$

§ 128. *Théorème III. Réciproque.* — La carte

$$x = f(\varphi, \lambda), \quad y = \int \frac{\cos\varphi}{p}\, d\varphi + \psi(x),$$

où f et ψ sont arbitraires, est toujours authalique.

Soit la notation

$$\theta(x, \varphi) = \int \frac{\cos\varphi}{p}\, d\varphi.$$

Calculons les dérivées p' et q'.

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\right],$$

$$q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = q\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial \theta}{\partial \rho},$$

d'où

$$pq' - p'q = pq\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] + p\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - pq\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] = p\frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Mais nous avons posé

$$\theta(x, y) = \int \frac{\cos\varphi}{p}\, d\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad pq' - p'q = \cos\varphi.$$

Donc la carte est authalique.

§ 129. *Théorème IV.* — Étant donnée une carte authalique, on peut, sans altérer l'authalisme, ajouter à y une fonction arbitraire de x.

Soit le système

$$x = f(\lambda, \varphi), \qquad y = \psi(\lambda, \varphi).$$

Je dis que

$$x = f(\lambda, \varphi), \qquad y = \psi(\lambda, \varphi) + \theta(x)$$

est aussi authalique.

Soient $p_1 p'_1 q_1 q'_1$ les dérivées du premier système. Calculons celles du second système : $p_2 = p_1$, $q_2 = q_1$.

$$p'_2 = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} = p'_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot p_1,$$

$$q'_2 = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} = q'_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot q_1.$$

Calculons $p'_2 q_2 - p_2 q'_2$. Il vient

$$p_2 q'_2 - p'_2 q_2 = p_1 q'_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} p_1 q_1 - p'_1 q_1 - \frac{\partial \theta}{\partial x} p_1 q_1 = p_1 q'_1 - p'_1 q.$$

Le second membre vaut $\cos \varphi$ à cause de l'authalisme du système (1). Donc $pq'_2 - p'_2 q_2$ vaut aussi $\cos \varphi$. Donc le système (2) est authalique.

CHAPITRE XII

Théorie générale des cartes orthomorphes.

Les caractéristiques de l'orthomorphie sont $a = b$ ou

$$\begin{cases} p - q' \cos \varphi = 0, \\ p' + q \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Si l'on prend la variable u :

$$\begin{cases} p + Q' = 0, \\ p' + Q = 0. \end{cases}$$

§ 130. *Théorème I.* — Les cartes orthomorphes ont un réseau orthogonal. En effet, on vérifie que les deux conditions de l'orthomorphie donnent $pq + p'q' = 0$. Cette équation caractérise les cartes orthogonales.

§ 131. *Théorème II.* — L'orthomorphie peut se définir par : les azimuts sont représentés en vraie grandeur. Cette définition donne les mêmes équations. En effet, sur la sphère, l'azimut α a pour tangente k.

Sur la carte, l'orientement k fait avec le méridien un angle qui a pour tangente :

$$\frac{\dfrac{q'}{q} - \dfrac{p'k + q'\cos\varphi}{pk + q\cos\varphi}}{1 + \dfrac{p'q'k + q'^2\cos\varphi}{pqk + q^2\cos\varphi}}.$$

Égalant cette valeur à k, il vient

$$k(pq + p'q') = (pq' - p'q) - \cos\varphi(q^2 + q'^2).$$

Cette égalité doit avoir lieu pour toutes les valeurs de k. Donc deux équations :

$$\begin{cases} pq + p'q' = 0, \\ (pq' - p'q) - \cos\varphi(q^2 + q'^2) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} p - q'\cos\varphi = 0, \\ p' + q\cos\varphi = 0. \end{cases}$$

§ 132. *Lemme.* — La courbe qui représente un méridien a pour rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + p'^2}}\right].$$

En effet, l'équation de la courbe représentant un méridien s'obtient en faisant λ constant; la seule variable est φ (ou u), d'où

$$\rho_m = \frac{\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}} = \frac{(Q^2 + Q'^2)^{\frac{3}{2}}}{Q'\dfrac{\partial Q}{\partial u} - Q\dfrac{\partial Q'}{\partial u}}.$$

Par les notations $pp'QQ'$, on a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= \frac{\partial p}{\partial u}\\ \frac{\partial Q'}{\partial \lambda} &= \frac{\partial p'}{\partial u}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

D'autre part, les conditions de l'orthomorphie sont

$$\left.\begin{aligned}p &= -Q'\\ p &= Q\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Calculons $\frac{\partial Q}{\partial u}$. A cause de l'orthomorphie :

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial p'}{\partial u}.$$

A cause de (I) :

$$\frac{\partial p'}{du} = \frac{\partial Q'}{\partial \lambda},$$

A cause de l'orthomorphie :

$$\frac{\partial Q'}{\partial \lambda} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

On calcule de même

$$\frac{\partial Q'}{\partial u} = -\frac{\partial p'}{\partial \lambda}.$$

L'expression de ρ_m devient donc

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{p\frac{\partial p}{\partial \lambda} + p'\frac{\partial p'}{\partial \lambda}}{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression vaut

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + p'^2}}\right].$$

Soit la notation

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{p^2 + p'^2}},$$

alors

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}$$

On calculerait de même la courbure de la courbe représentant les parallèles. On obtient

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{\partial \Omega}{\partial u}.$$

§ 133. *Théorème III.* — Dans une carte orthomorphe, si les méridiens sont circulaires, les parallèles le sont aussi.

En effet, l'équation d'un méridien a pour seule variable u, car λ est constant. Donc la circularité du méridien s'exprime par ρ_m indépendant de u, ou

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) = 0.$$

A cause de

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda},$$

cette condition devient

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \,.\, \partial u} = 0.$$

La circularité du parallèle s'exprime par

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \cdot \left(\frac{1}{\rho_p}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \,.\, \partial \lambda} = 0.$$

On obtient donc la même équation que plus haut; donc le théorème est démontré.

Remarque. — La formule

$$m = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{p^2 + p'^2}$$

devient, par la notation Ω,

$$m = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}.$$

§ 134. *Théorème IV.* — On peut choisir arbitrairement la fonction qui définit x ou y. Le problème est déterminé, sauf les constantes d'intégration.

Même démonstration que pour les cartes authaliques.

Exemple I : Soit choisi arbitrairement

$$x = \operatorname{tg}\varphi \cos\lambda.$$

On en tire

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\operatorname{tg}\varphi \sin\lambda, \qquad q = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\cos\lambda}{\cos^2\varphi}.$$

Introduisons ces valeurs dans les conditions de l'orthomorphie, il vient

$$p' = -q\cos\varphi = -\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi},$$

$$q' = \frac{p}{\cos\varphi} = -\frac{\sin\lambda\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\sin\lambda\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

d'où

$$y = \text{c}^{\text{te}} - \frac{\sin\lambda}{\sin\varphi}.$$

Exemple II : Soit $x = \cos h\lambda \operatorname{tg}^h \frac{1}{2} z$.

On déduit par le même calcul $y = \sin h\lambda \operatorname{tg}^h \frac{1}{2} z$.

C'est la carte conique orthomorphe.

§ 135. Fonctions imaginaires. — Prenons pour variables α et β définies par

$$\alpha = \lambda + iu, \qquad \beta = \lambda - iu.$$

Théorème V. — Si la carte

$$\begin{cases} x + iy = f_1(\alpha, \beta) \\ x - iy = f_2(\alpha, \beta) \end{cases}$$

est orthomorphe, on a les relations

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \beta} = 0.$$

En effet, les deux équations de la carte donnent

$$2x = f_1 + f_2, \qquad 2iy = f_1 - f_2,$$

d'où l'on calcule

$$2p = 2\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right]\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right]\frac{\partial \beta}{\partial \lambda}.$$

Par les formules qui définissent α et β, on obtient

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = 1, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = 1,$$

d'où

$$2p = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta};$$

de même

$$2iQ' = 2i\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\right)i.$$

La condition de l'orthomorphie $p + Q' = 0$ donne

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta} = 0.$$

La deuxième condition de l'orthomorphie $p' = Q$ donne, par des calculs analogues,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial \beta} = 0.$$

D'où l'on conclut

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \beta} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les équations du système se réduisent donc à

$$\begin{array}{l} x + iy = f_1(\beta) \\ x - iy = f_2(\alpha) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2p = f_1' + f_2' \\ 2p' = 2[f_2' - f_1'] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2Q' = -[f_1' + f_2'] \\ 2Q = i[f_2' - f_1']. \end{array} \right.$$

§ 136. *Théorème VI.* — L'échelle linéaire a pour valeur

$$m = \frac{1}{\cos \rho} \cdot \sqrt{f_1'}\sqrt{f_2'}.$$

Cette relation se déduit de la formule

$$m = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\sqrt{p^2 + p'^2},$$

où p et p' sont remplacés par les valeurs trouvées ci-dessus.

Elle peut d'ailleurs se calculer directement. L'échelle linéaire, par définition, vaut (§ 5)

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{d\varphi^2 + d\lambda^2\cos^2\varphi}.$$

Introduisons la variable

$$du = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Il vient

$$m^2\cos^2\varphi = \frac{dx^2 + dy^2}{d\lambda^2 + du^2}.$$

D'autre part, de $x + iy = f_1(\beta)$, on tire

$$dx + idy = \frac{\partial f_1}{\partial\beta} = f'_1[d\lambda - idu],$$

de même, $x - iy = f_2$ donne

$$dx - idy = f'_2[d\lambda + idu].$$

Multipliant ces deux équations, il vient

$$dx^2 + dy^2 = f'_1 f'_2[d\lambda^2 + du^2]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 137. Application. — La carte de Lagrange peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x + iy = \operatorname{tg}\frac{1}{2}h\beta \\ x - iy = \operatorname{tg}\frac{1}{2}h\alpha, \end{cases}$$

d'où

$$f'_1 = \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}h\beta}, \qquad f'_2 = \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}h\alpha}.$$

La fonction Ω définie par $\Omega = \frac{1}{\sqrt{p^2 + p'^2}}$ a pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{f'_1 f'_2}} = \frac{2}{h}[\cos \tfrac{1}{2} h\alpha . \cos \tfrac{1}{2} h\beta] = \frac{1}{h}[\cos \tfrac{1}{2} h(\alpha + \beta) + \cos \tfrac{1}{2} h(\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{1}{h}[\cos h\lambda + \cos hiu].$$

Le rayon de courbure du parallèle se calcule par

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{\partial \Omega}{\partial u} = -i \sin hiu,$$

de même

$$\frac{1}{\rho_m} = -\sin h\lambda.$$

CHAPITRE XIII

Étude des cartes où la plus grande altération locale est minimum.

A. — Cartes orthomorphes où les valeurs extrêmes de l'échelle diffèrent aussi peu que possible.

§ 138. — Exemple I : Représenter en une carte conique un hémisphère, abstraction faite d'une calotte polaire de rayon 10°.

Choisissons le paramètre n de manière que l'échelle soit la même aux bords intérieur et extérieur de la carte; soit donc pour $z_2 = 10°$, et $z_1 = 90°$; il vient, par la formule du § 71,

$$n = \frac{\log \sin 90° - \log \sin 10°}{\log \operatorname{tg} 45° - \log \operatorname{tg} 5°} = 0.716.$$

L'échelle atteint son minimum à une colatitude z_0 définie par (§ 72) $\cos z_0 = n = 0.716$, d'où $z_0 = 44°5$. Cette latitude diffère de la latitude moyenne, qui est

$$\frac{10 + 90}{2} = 50°.$$

Les valeurs extrêmes de l'échelle sont dans le rapport (§ 73)

$$\frac{m_{90}}{m_{44.5}} = \frac{(\text{tg } 22°25)^{0.716}}{\sin 44°5} = 1.\dot{3}\dot{3} = \Delta_m.$$

Les valeurs extrêmes de S sont dans le rapport

$$\Delta_S = (\Delta_m)^2 = \overline{1.33}^2 = 1.78.$$

Ainsi on peut représenter toute la surface terrestre, abstraction faite de deux calottes polaires, en deux cartes tellement que $\Delta_m = 1.33$.

La partie non représentée vaut les

$$(1 - \cos 10) = 0.0152 = \frac{1}{66}$$

de la sphère.

§ **139.** — Exemple II : Représenter toute la surface terrestre en trois cartes : une zone équatoriale et deux calottes polaires, de manière que l'échelle soit la même à la bordure et que Δ_m soit minimum.

Les valeurs extrêmes de m sont à l'équateur, au pôle, à la bordure.

Pour que Δ_m soit minimum, il faut que l'échelle soit la même au pôle et à l'équateur. Soit z_0 la colatitude de la bordure.

Pour les calottes polaires (carte stéréographique § 35),

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z_0}.$$

Pour la zone équatoriale (carte de Mercator § 25),

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sin z_0}.$$

Égalons ces deux valeurs de Δ_m. Il vient

$$\sin z_0 = \cos^2 \tfrac{1}{2} z_0,$$

d'où

$$\text{tg } \tfrac{1}{2} z_0 = 0.5, \qquad z_0 = 53°, \qquad \varphi = 37°,$$

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos 37°} = 1.25, \qquad \Delta_S = (\Delta_m)^2 = 1.5625.$$

L'échelle étant la même à la bordure, si l'on fait rouler la carte polaire le long du bord de la carte équatoriale, il y aura raccord au point de tangence (fig. 19).

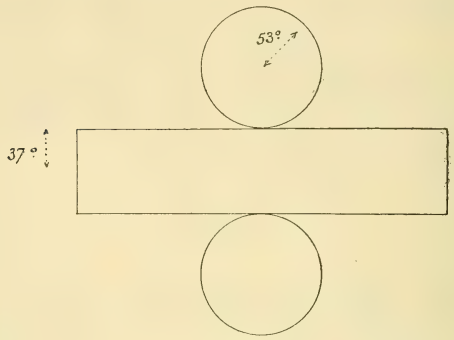


Fig. 19.

La carte équatoriale représente les $^6/_{10}$ de la sphère; chaque carte polaire représente $^2/_{10}$ de la sphère.

Les dimensions du dessin sont dans le rapport ci-dessous : rayon des calottes = 1; longueur équateur = 6.28; hauteur de la bande équatoriale 1.38.

Sur la sphère, ces dimensions sont dans le rapport 1 : 6.80 : 1.38.

B. — Cartes authaliques où la plus grande déformation est minimum.

§ **140.** — Exemple I : Représentation d'une zone sphérique par une carte de la quatrième classe

$$\theta = \lambda n, \qquad \rho^2 = \frac{k}{n^2} - \frac{2}{n}\cos z.$$

Choisissons les paramètres k et n de manière que les bords inférieur et supérieur de la carte soient conjugués.

Nous avons obtenu (§ 69) trois équations entre les cinq quantités z_8, z_9, A, k, n.

Ces équations se simplifient par l'introduction de deux variables auxiliaires p et q.

p est la colatitude moyenne

$$2p = z_8 + z_9.$$

$2q$ est l'étendue en latitude

$$2q = z_8 - z_9.$$

De la première équation, on tire :

$$\cos z_8 + \cos z_9 = 2 \cos \tfrac{1}{2}(z_8 + z_9) \cos \tfrac{1}{2}(z_8 - z_9) = 2 \cos p \cos q.$$

Et de la seconde :

$$\cos z_8 \times \cos z_9 = \cos(p + q) \cos(p - q)$$
$$= (\cos p \cos q - \sin p \sin q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q)$$
$$= \cos^2 p \cos^2 q - \sin^2 p \sin^2 q = \cos^2 p \cos^2 q - [(1 - \cos^2 p)(1 - \cos^2 q)]$$
$$= \cos^2 p + \cos^2 q - 1.$$

Les équations (3) et (4) du § 69 deviennent

$$\cos p \,.\, \cos q = \frac{n}{A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\cos^2 p + \cos^2 q = \frac{k}{A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d'où l'on tire

$$(\cos p + \cos q)^2 = \frac{k}{A^2} + \frac{2n}{A^2},$$

$$(\cos p - \cos q)^2 = \frac{k}{A^2} - \frac{2n}{A^2}.$$

Éliminons k par l'équation (1)

$$A^4 n^2 - A^2 k + 1 = 0,$$

on obtient

$$\cos p + \cos q = n + \frac{1}{A^2},$$

$$\cos p - \cos q = n - \frac{1}{A^2},$$

d'où l'on tire

$$n = \cos p,$$
$$A^2 = \frac{1}{\cos q} = \operatorname{tg}^2 T,$$
$$k = \cos q + \frac{\cos^2 p}{\cos q}.$$

Les équations de la carte sont

$$\theta = \lambda n,$$
$$\rho^2 = \frac{1}{\cos p}\left[\frac{\cos p}{\cos q} + \frac{\cos q}{\cos p} - 2\cos z\right].$$

L'équation (2) (§ 69) donne

$$\cos z_1 = \frac{\cos p}{\cos q}.$$

§ **141**. *Remarque I.* — Le coefficient n ne dépend que de p, donc seulement de la latitude moyenne.

Remarque II. — La déformation

$$\operatorname{tg}^2 T = A^2 = \frac{1}{\cos q}$$

ne dépend que de l'étendue en latitude.

Si l'on se fixe cette étendue, la superficie de la zone est d'autant plus grande qu'elle se rapproche de l'équateur. Elle est maximum quand la zone est à cheval sur l'équateur; alors $p = 90°$, $n = 0$. La carte est cylindrique (carte I_2) (§ 30).

Remarque III. — La latitude où la déformation est maximum est donnée par

$$\cos z_1 = \frac{\cos p}{\cos q};$$

elle diffère donc de la latitude moyenne.

Remarque IV. — Quand l'étendue en latitude est infiniment petite, $q = 0$. Et la carte a pour équation

$$\rho^2 = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\cos z.$$

C'est la carte de Stromeyer (§ 68). Ainsi la carte de Stromeyer n'est la plus avantageuse que pour une zone infiniment étroite.

Remarque V. — Les latitudes z_1 et z_2, où la déformation est nulle, sont données par l'équation (§ 68)

$$\cos z_{1,2} = n \pm \sqrt{n^2 - k + 1}$$

$$= \cos p \pm \sqrt{\cos^2 p - \cos q - \frac{\cos^2 p}{\cos q} + 1}.$$

Donc les formules qui expriment p, q, A, k, n en fonction de z_1 et z_2 seront très compliquées. C'est à tort que Zöppritz définit la carte IV_2, la carte où deux latitudes sont sans déformation.

Si l'on se donne deux des cinq quantités p, q, A, k, n, les trois autres se calculent très aisément sans l'introduction de z_1 et z_2.

§ **142.** Application numérique. — Soit à représenter la zone comprise entre l'équateur et le parallèle de latitude 74°.

$$q = 37°, \qquad p = \tfrac{1}{2}[90 + 16] = 53°,$$

$$n = \cos 53° = 0.6, \qquad \cos q = \cos 37° = 0.8,$$

$$\rho^2 = \frac{1}{0.6}\left[\frac{3}{4} + \frac{4}{3} - 2\cos z\right], \qquad \operatorname{tg}^2 T = 1.25 = \Delta_m,$$

$$\omega = 9°15', \qquad \cos z_7 = \frac{\cos p}{\cos q} = \frac{3}{4}, \qquad z_7 = 41°5.$$

La déformation est nulle aux latitudes z_1 et z_2 calculées par

$$\cos z_{1,2} = 0.6 \pm \sqrt{0.11},$$

soit donc aux latitudes 15°5 et 68°.

Il est donc possible de représenter toute la surface du globe en deux cartes tronconiques, abstraction faite de deux calottes représentant une superficie de $\frac{1}{25}$ du globe, tellement que la déformation ne dépasse pas $\Delta_m = 1.25$.

Représentation d'une calotte sphérique.

§ 143. *Remarque VI.* — Pour ce cas particulier,

$$z_3 = 0, \qquad 2p = 2q = z_9, \qquad \theta = \lambda \cos p.$$

$$\rho^2 = \frac{4}{\cos p}[1 - \cos z], \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{\cos p}} 2 \sin \tfrac{1}{2} z.$$

Exemple : La carte d'Afrique dans le traité de Zöppritz (fig. 20).

Fig. 20.

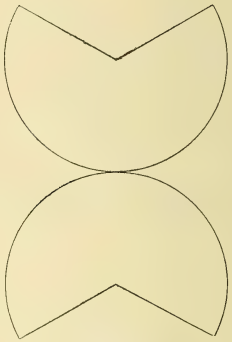


Fig. 21.

Exemple I : La calotte est un hémisphère.

$$z_9 = 90°, \qquad p = q = 45° \text{ (fig. 21)},$$

d'où

$$n = 0.707, \qquad \operatorname{tg}^2 T = 1.414 = \Delta_m, \qquad \omega = 9°50'.$$

Il est donc possible de représenter toute la terre en deux cartes avec $\Delta_m = 1.414$.

§ 144. — Exemple II : La calotte est infiniment petite.

$$p = q = 0, \qquad n = 1, \qquad \rho = 2 \sin \tfrac{1}{2} z.$$

C'est la carte azimutale.

Donc la carte azimutale n'est le plus avantageuse que pour une région peu étendue (abstraction faite de l'inconvénient d'une déchirure radiale, comme dans la carte d'Afrique).

Pour un hémisphère, la carte azimutale donne

$$\operatorname{tg} T = 1.414, \qquad \Delta_m = 2, \qquad \omega = 19°40'.$$

§ **145.** — Exemple III : La surface terrestre en trois cartes : deux cartes polaires et une carte équatoriale.

Pour la carte cylindrique, le système le plus avantageux est

$$y = n \sin \varphi.$$

La déformation doit être la même à la bordure commune :

Pour la carte cylindrique (§ 30) :

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos \varphi_1}.$$

Pour la carte polaire (§ 36) :

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z}.$$

En égalant ces deux valeurs, on trouve, comme pour la carte orthomorphe du § 138,

$$\varphi_1 = 37°, \qquad z = 53°, \qquad \Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = 1.25, \qquad \omega = 9°15'.$$

L'indicatrice est circulaire aux pôles et aux parallèles de latitude 26°30′.

Remarque. — C'est à Collignon que nous avons emprunté l'idée de représenter la sphère en trois cartes; mais Collignon prend pour la zone équatoriale la projection $y = \sin \varphi$; alors la bordure est formée par le parallèle de 30° au lieu de 37°. Chaque calotte vaut $^1/_4$ de la sphère (au lieu de 0.2).

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos^2 30} = 1.33 \text{ (au lieu de } 1.25).$$

Représentation d'une calotte sphérique.

§ 146. — Exemple IV : Comparaison entre la carte cylindrique et la carte azimutale.

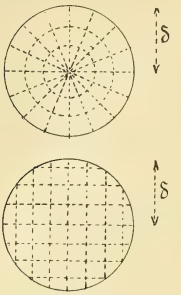


Fig. 22.

Soit δ l'étendue de la calotte (fig. 22).

La carte azimutale donne (§ 36)

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\delta}.$$

La carte cylindrique $y = n \sin \varphi$ donne (§ 30)

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1}{\cos \delta}.$$

Comparons ces deux valeurs.

On a l'identité

$$2 \cos \delta < 1 + \cos \delta,$$

d'où $\cos \delta < \dfrac{1 + \cos \delta}{2}$, d'où $\cos \delta < \cos^2 \frac{1}{2}\delta$.

Donc la carte azimutale est plus avantageuse; d'autre part, elle peut s'employer pour une calotte où $\delta > 90^\circ$; tandis que la carte cylindrique ne s'étend pas au delà de $\delta = 90^\circ$.

Région limitée par un contour ovale.

§ 147. — Exemple V : Soit à faire une carte ovale ayant pour longueur 120° (fig. 23).

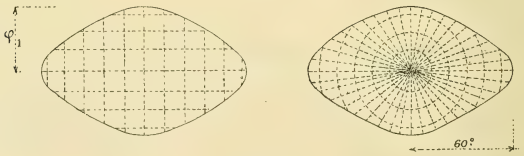


Fig. 23.

Par la carte azimutale,

$$\Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{1}{\cos^2 30} = 1.333.$$

Par la carte cylindrique,

$$y = n \sin \varphi, \qquad \Delta_m = \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\cos \varphi_1}.$$

Les deux systèmes ont même valeur si

$$\cos \varphi_1 = \cos^2 30, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_1 = 41°5 \text{ (fig. 23).}$$

Donc la demi-longueur étant 60°.

Si la demi-largeur est
- $> 41°5$, il faut choisir ... azimutale.
- $< 41°5$, » ... cylindrique.
- $= 41°5$, le choix est indifférent.

Remarquons toutefois que la disposition des régions altérées n'est pas la même (fig. 24).

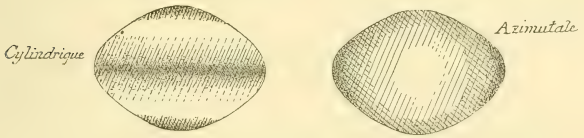


Fig. 24.

Reprenons les calculs pour une longueur autre que 60°.

Demi-longueur.	30	40	50	60	70	80	90
Demi-largeur .	20°40′	27°40	34°50	41°50	47°50	53°50	60°
$\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ . .	1.45	1.45	1.45	1.44	1.465	1.485	1.5.

Le rapport des dimensions ne diffère guère de 1.5, et nous pouvons énoncer le principe : « Si on limite le choix aux cartes » cylindrique et azimutale :

» Quand la longueur dépasse 1.5 fois la largeur, il faut choisir » la carte cylindrique ;

» Quand la longueur est inférieure à 1.5 fois la largeur, il » faut choisir la carte azimutale. »

Carte où les parallèles sont elliptiques.

§ **148**. — Appliquons à la carte azimutale authalique la méthode qui consiste à réduire toutes les ordonnées dans un certain rapport. Les parallèles qui étaient circulaires deviennent elliptiques; mais les équidéformées qui étaient circulaires deviennent des courbes du 4e degré.

Prenons pour axes de coordonnées le méridien $\lambda = 0$ et le méridien $\lambda = 90°$. La carte-azimutale a pour équations

$$x = 2 \sin \xi \cos \lambda, \qquad y = 2 \sin \xi \sin \lambda.$$

Multiplions x par k ($k > 1$) et divisons y par la même constante; l'authalisme subsiste et l'échelle de superficie ne change pas.

Les équations deviennent

$$x = 2K \sin \xi \cos \lambda, \qquad y = \frac{2}{k} \sin \xi \sin \lambda,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \lambda, \qquad \rho = 4 \sin^2 \xi \left[k^2 \cos^2 \lambda + \frac{1}{k^2} \sin^2 \lambda\right].$$

Les dérivées sont

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -2k \sin \xi \sin \lambda, \qquad p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{2}{k} \sin \xi \cos \lambda,$$

$$q = \frac{\partial x}{\partial \xi} = -k \cos \xi \cos \lambda, \qquad q' = \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{1}{k} \cos \xi \sin \lambda.$$

Il vient ensuite

$$m_m^2 = \cos^2 \xi \; k^2 \cos^2 \lambda + \cos^2 \xi \; . \; \frac{1}{k^2} \sin^2 \lambda,$$

$$m_p^2 = \frac{1}{\cos^2 \xi} \left[k^2 \sin^2 \lambda + \frac{1}{k^2} \cos^2 \lambda\right].$$

L'équidéformée a pour équation

$$[\operatorname{tg} T - \cos \operatorname{tg} T]^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \omega = \sin^2 \lambda \left[\frac{\cos \xi}{k} - \frac{k}{\cos \xi}\right]^2 + \cos^2 \lambda \left[\frac{1}{k \cos \xi} - k \cos \xi\right]^2.$$

Elle est représentée sur la carte par une courbe du quatrième degré. Soient les notations abrégées

$$x^2 = \alpha, \qquad y^2 = \gamma, \qquad k^2 = H, \qquad 2 + 4 \operatorname{tg}^2 \omega = M.$$

L'équation est

$$4M[4H - (\alpha + H^2\gamma)] = 16(H^2 + 1) + (\alpha + \gamma)(\alpha + H^2\gamma) - 8H(\alpha + \gamma).$$

La forme de cette courbe dépend des paramètres H et M.

Elle coupe l'axe des x au point de colatitude ξ déterminé par

$$\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{tg} T - \operatorname{cotg} T)^2 = \left(k \cos \xi - \frac{1}{k \cos \xi}\right);$$

d'où deux solutions :

$k \cos \xi = \operatorname{cotg} T$, solution toujours réelle;

$k \cos \xi = \operatorname{tg} T$, solution imaginaire pour $\operatorname{tg} T > k$.

Elle coupe l'axe des y au point de colatitude ξ déterminé par

$$\lambda = 90^\circ \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{tg} T - \operatorname{cotg} T)^2 = \left(\frac{k}{\cos \xi} - \frac{\cos \xi}{k}\right)^2;$$

d'où deux solutions :

$\cos \xi = k \operatorname{tg} T$, solution toujours imaginaire;

$\cos \xi = k \operatorname{cotg} T$, solution réelle pour $\operatorname{tg} T > k$.

Donc pour $\operatorname{tg} T < K$, la courbe coupe deux fois l'axe des x et ne coupe pas l'axe des y; elle est composée de deux ovales à cheval sur l'axe des x.

Pour $\operatorname{tg} T > K$, la courbe a la forme d'un ovale; elle coupe une fois chacun des axes.

Pour $\operatorname{tg} T = K$, elle a la forme d'un 8 couché sur l'axe des x.

Application numérique. — Soit

$$\operatorname{tg} T = \sqrt{2}. \qquad 4 \operatorname{tg}^2 \omega = 0.5.$$

L'équation devient

$$\alpha^2 + H^2\gamma + (1 + H^2)x\gamma + \alpha(10 - 8H) + H\gamma(10H^2 - 8) + 16H^2 - 40H + 16 = 0.$$

Pour $H > 2$, elle se compose de deux ovales.

Pour $H = 2$, elle représente un 8.

Pour $H = 1$, elle devient un cercle $x^2 + y^2 = 2$. C'est la bordure d'un hémisphère.

Pour H compris entre 2 et 1.6, elle présente une striction à l'axe des y. Cette valeur limite 1.6 est racine de l'équation du sixième degré

$$H^6 + MH^5 + H^4[5 - M^2] - 2MH^3 - H^2 + MH + 1 = 0.$$

Dans l'application traitée,

$$H^6 + 2.5H^5 - 5.25H^4 - 5H^3 - H^2 + 2.5H + 1 = 0.$$

Recherchons les points où la déformation est nulle. Ils satisfont à l'équation

$$0 = \sin^2\lambda \left[\frac{\cos\xi}{k} - \frac{k}{\cos\xi}\right]^2 + \cos^2\lambda \left[k\cos\xi - \frac{1}{k\cos\xi}\right]^2.$$

Les solutions sont

$$\lambda = 0 \qquad \text{avec} \quad \cos\xi = \frac{1}{k}, \quad \text{solution réelle;}$$

$$\lambda = 90^\circ \quad \text{avec} \quad \cos\xi = k, \quad \text{solution imaginaire.}$$

Donc la déformation est nulle en deux points situés sur l'axe des x.

Exemples numériques. I : $\operatorname{tg}^2 = 2$; $H = 2$. Forme d'un 8.

$x =$	0.	0.655	0.975	1.255	1.555	1.765	2.05	2.30	2.45
$y =$	0.	0.300	0.402	0.468	0.484	0.471	0.414	0.294	0.

Demi-longueur : $120° = 2.45$.
Largeur maximum : 0.484.
Déformation nulle : $\xi = 45°$; colatitude : 90°.
Cette courbe enferme une superficie égale aux $\frac{28}{100}$ du globe.

Exemple II : $H = 1.7$. Forme ovale étranglée.
Équation :

$$\alpha^2 + 2.89\gamma^2 + 3.89\alpha\gamma - 3.6\alpha + 15.3\gamma - 5.76 = 0.$$

Demi-longueur sur axe des x : $\xi = 57°$; colatitude : 114°; $x = 2.19$ (fig. 25).

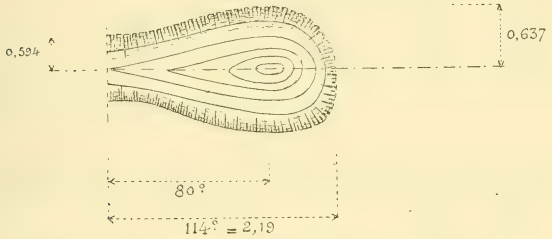


Fig. 25.

Demi-largeur sur l'axe des y : $\xi = 24°$; colatitude : 48°; $y = 0.594$.
Largeur maximum : $y = 0.657$; pour $x = 1.01$.
Déformation nulle : $\xi = 40°$; colatitude : 80°.

Exemple III : $H = 1.5$. Forme ovale.
Équation :

$$\alpha^2 + 2.25\gamma + 3.25\alpha\gamma - 2\alpha + 10.50\gamma - 8 = 0.$$

Demi-longueur sur axe des x : $\xi = 47°$; $x = 2$.
Demi-largeur sur axe des y : $\xi = 30°$; $y = 0.816$.
Déformation nulle : $\xi = 35°$; colatitude : 70°.

Cartes à méridiens rectilignes.

§ **149.** — Proposons-nous de faire la carte d'une région symétrique par rapport à un arc de grand cercle. Cet axe servira d'équateur, et sur la carte il sera l'axe des x.

Découpons la région en bandes parallèles par des méridiens équidistants, et représentons chacune de ces bandes par une carte cylindrique à déformation minimum (I_2), $y = n \sin \varphi$.

Le paramètre n varie d'une bande à l'autre, suivant le plus ou moins d'étendue en latitude; si nous juxtaposons les bandes, elles ne se raccorderont qu'imparfaitement.

Proposons-nous de calculer une carte où n varie d'une manière continue en fonction de la longitude, et pour cela, supposons que la région ait un contour ovale; le paramètre n s'approche de l'unité à mesure que l'on s'éloigne du méridien central.

Pour cette raison, les méridiens de la carte ne sont pas équidistants; l'intervalle augmente à mesure qu'on s'éloigne du méridien central.

Les équations de la carte seront

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 = q, \qquad x = f(\lambda).$$

La condition de l'authalisme est

$$\cos \varphi = pq' - p'q.$$

Il vient donc

$$\cos \varphi = pq', \qquad \text{d'où} \qquad q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\cos \varphi}{p};$$

d'où, en intégrant,

$$y = \frac{\sin \varphi}{p} + \text{fonction arbitraire de } \lambda.$$

Pour simplifier les calculs, nous supposons nulle cette fonction additionnelle.

Il vient ensuite

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\sin \varphi}{p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

La déformation est donnée par

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{p}{\cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{p}\right)^2 + \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \lambda}\right]^2.$$

La déformation est nulle quand chacun des carrés est nul; d'où deux solutions :

$$\cos \varphi = p \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\cos \varphi = p \quad \text{avec} \quad \sin \varphi = 0; \quad \text{d'où} \quad p = 1.$$

Cette deuxième solution est sur l'équateur.

§ 150. — Nous traiterons quelques exemples en choisissant arbitrairement la fonction p.

Exemple I : Soit p une fonction du premier degré en λ.

$$p = M + 2N\lambda.$$

Puisque l'intervalle des méridiens augmente à mesure que λ croît, il faut que N soit positif.

Il vient ensuite : $x = M\lambda + N\lambda^2$.

$$q' = \frac{\cos \varphi}{p} = \frac{\cos \varphi}{M + 2N\lambda},$$

$$y = \frac{\sin \varphi}{p} = \frac{\sin \varphi}{M + 2N\lambda},$$

$$p' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\sin \varphi}{(M + 2N\lambda)^2} \cdot 2N.$$

Les points où la déformation est nulle sont donnés par

$$p = 1 = M + 2N\lambda. \qquad \lambda_1 = \frac{1 - M}{2N}.$$

Cette solution n'existe que si $M < 1$. Nous supposerons dans la suite que $M < 1$. Ce point a pour abscisse

$$x_1 = \frac{1 - M^2}{4N}.$$

La carte n'est pas symétrique par rapport au nul méridien. Nous ne considérerons que les valeurs positives de λ.

Calcul de la déformation. — Sur l'équateur, à cause de la symétrie, il suffit de calculer m_m;

$$m_m^2 = q^2 + q'^2;$$

d'où

$$m_m = q' = \frac{\cos\varphi}{p} = \frac{1}{M + 2N\lambda} = \operatorname{tg} T;$$

à l'origine des coordonnées,

$$m_m = \frac{1}{M}.$$

Le conjugué de l'origine est à une longitude λ_2 déterminée par

$$m_m = M = \frac{1}{M + 2N\lambda_2}; \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_2 = \frac{\frac{1}{M} - M}{2N}.$$

Sur la carte, ce point a pour abscisse

$$x^2 = M\lambda + N\lambda^2 = \frac{\frac{1}{M^2} - M^2}{4N}.$$

La déformation se calcule par

$$4\,\mathrm{tg}^2\omega = (\mathrm{tg}\,\mathrm{T} - \mathrm{cotg}\,\mathrm{T})^2$$

$$= \left(\frac{\mathrm{M} + 2\mathrm{N}\lambda}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\mathrm{M} + 2\mathrm{N}\lambda}\right)^2 + \left[\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \frac{2\mathrm{N}}{(\mathrm{M} + 2\mathrm{N}\lambda)^2}\right]^2.$$

Sur le nul méridien,

$$4\,\mathrm{tg}^2\omega = \left(\frac{\mathrm{M}}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\mathrm{M}}\right)^2 + \mathrm{tg}^2\varphi \cdot \frac{4\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^4}.$$

Elle ne s'annule jamais.

A l'origine,

$$4\,\mathrm{tg}^2\omega = \left(\frac{1}{\mathrm{M}} - \mathrm{M}\right)^2.$$

Le conjugué de l'origine est à une latitude φ_4 déterminée par

$$\left(\frac{1}{\mathrm{M}} - \mathrm{M}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{M}}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\mathrm{M}}\right)^2 + \mathrm{tg}^2\varphi \cdot \frac{4\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^4};$$

d'où l'on tire

$$\cos^2\varphi_4 = \mathrm{M}^4 + \frac{4\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^2}.$$

La déformation est minimum à une latitude φ_5 qui se calcule en égalant à zéro la dérivée en φ.

Il vient

$$\cos^4\varphi_5 = \mathrm{M}^4 + \frac{4\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^2} = \cos^2\varphi_4.$$

Étudions l'équation des équidéformées.

Sur la carte, l'équation se calcule par le changement de variables :

$$y = \frac{\sin\varphi}{\mathrm{M} + 2\mathrm{N}\lambda}, \qquad x = \mathrm{M}\lambda + \mathrm{N}\lambda^2;$$

d'où l'on tire

$$2\mathrm{N}\lambda = -\mathrm{M} \pm \sqrt{\mathrm{M}^2 + 4\mathrm{N}x},$$

$$\sin\varphi = y\sqrt{\mathrm{M}^2 + 4\mathrm{N}x}.$$

Nous simplifierons les équations par l'emploi des variables auxiliaires z et v définies par

$$z = y^2, \qquad v = M^2 + 4Nx.$$

L'équidéformée est une courbe du sixième degré dont l'équation est

$$(v - zv^2)(2 + 4\,\mathrm{tg}^2\omega) = 4\,N^2 z + 1 + v^2 + z^2v^2 - 2zv.$$

Application numérique. — Soient choisis arbitrairement

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad N = 0.20.$$

A l'origine,

$$\mathrm{tg}\,T = \sqrt{2}, \qquad \omega = 19^\circ 30', \qquad 4\,\mathrm{tg}^2\omega = 0.5.$$

Sur le nul méridien, le conjugué de l'origine a pour latitude φ_4 tel que

$$\cos^2\varphi_4 = M^4 + \frac{4N^2}{M^2} = 0.57, \qquad \varphi_4 = 41^\circ.$$

La déformation minimum a lieu à la latitude φ_5 donnée par

$$\cos^4\varphi_5 = 0.57, \qquad \varphi_5 = 30^\circ.$$

Sur l'équateur, la déformation est nulle à la longitude λ_1 déterminée par

$$\lambda_1 = \frac{1 - M}{2N} = 0.985 = 56^\circ 4.$$

Le conjugué de l'origine a pour longitude λ_2, déterminée par

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{M} - M}{2N} = 1.77 = 101^\circ.$$

Nous limiterons la carte à l'équidéformée conjuguée de l'origine, de sorte que dans l'intérieur de ce contour, la déformation

ne dépasse jamais $\omega = 19°50'$ (fig. 26). Ce contour a pour équation

$$2.5[v - zv^2] = 0.16z + v^2 + (1 - zv)^2.$$

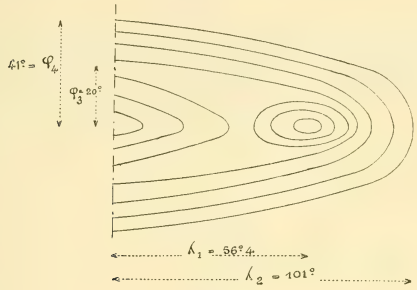


Fig. 26.

Ci-dessous les ordonnées de quelques points :

$x =$	0	0.19	0.30	0.42	0.55	0.71	0.90	1.14	1.44	1.875
$y =$	0.927	0.89	0.85	0.77	0.71	0.63	0.55	0.45	0.31	0.

Deux telles cartes juxtaposées à leur nul méridien renfermeraient une superficie égale aux $\frac{28}{100}$ du globe, s'étendant en longitude sur 202° et en latitude sur 82°.

Les équidéformées ont la forme représentée sur la figure.

§ **151.** — Pour les deux cartes suivantes, nous nous imposons que le nul-méridien soit un axe de symétrie; il faut alors que x soit une fonction impaire de λ et s'annulant avec λ.

Carte VII. — Soit $p = M + N\lambda^2$. L'application des formules du § 149 donne immédiatement pour les points à déformation nulle :

Sur l'équateur le point λ_1 par

$$p = 1 \qquad \text{ou} \qquad M + N\lambda_1^2 = 1;$$

d'où

$$\lambda_1^2 = \frac{1 - M}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sur le méridien central, le point φ_3 par

$$\cos\varphi_3 = p = M. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Ces deux points n'existent que si $M < 1$.

Pour calculer la déformation le long des axes, il suffit de suivre les variations de m_m donné par

$$m_m = q' = \frac{\cos\varphi}{M + N\lambda^2}.$$

à l'origine

$$m_m = \frac{1}{M}.$$

Sur l'équateur,

$$m_m = \frac{1}{M + N\lambda^2}.$$

Le conjugué du centre est à une longitude λ_2 déterminée par

$$m_m = M; \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_2^2 = \frac{\frac{1}{M} - M}{N}. \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Sur le méridien central,

$$m_m = \frac{\cos\varphi}{M}.$$

Le conjugué du centre est à une latitude φ_4 déterminée par

$$m_m = M; \qquad \text{d'où} \qquad \cos\varphi_4 = M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Remarquons que les points 3 et 4 sont déterminés par le seul paramètre M.

Les équidéformées ont pour équation

$$4\,\mathrm{tg}^2\omega = \left(\frac{p}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{p}\right)^2 + \mathrm{tg}^2\varphi \cdot \frac{4N^2\lambda^2}{p^4}.$$

Applications numériques. — Imposons-nous la déformation

au centre de la carte : soit $4\,\mathrm{tg}^2\omega = 0.5$. Cette détermination fixe le paramètre $M = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et les points (3) et (4).

$$\cos\varphi_3 = M, \qquad \varphi_3 = 45^\circ, \qquad y_3 = 1,$$
$$\cos\varphi_4 = M^2, \qquad \varphi_4 = 60^\circ, \qquad y_4 = 1.2247.$$

Nous pouvons encore disposer du paramètre N; par exemple en déterminant arbitrairement la longitude λ_2.

Exemple I : Soit $\lambda_2 = 127^\circ = 2.22$.
Par l'équation II, il vient

$$(2.22)^2 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{N}; \quad \text{d'où} \quad N = 0.143; \quad \text{d'où} \quad x_2 = 2.09.$$

La formule (I) donne

$$\lambda_1^2 = 2.045, \qquad \lambda_1 = 1.45 = 82^\circ.$$

Nous prendrons pour contour de la carte l'équidéformée conjuguée de l'origine; la détermination de ses points est assez laborieuse; soit le point 5 de longitude $64^\circ = 1.12$.
En ce point $p = M + N\lambda^2 = 0.886$. La latitude de 5 se calcule par

$$0.5 = \left(\frac{0.88}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{0.88}\right)^2 + \mathrm{tg}^2\varphi \cdot \left(\frac{0.52}{0.785}\right)^2; \quad \text{d'où} \quad \varphi_5 = 47^\circ 5,$$
$$y_5 = 0.855, \qquad x_5 = 0.859.$$

Cette équidéformée est une ovale de 254° de long sur 120° de large; sa superficie équivaut aux $\frac{47.2}{100}$ du globe.

Exemple II : Soient

$$\lambda_2 = 180^\circ, \qquad x_2 = 2.96, \qquad N = 0.0718, \qquad \lambda_1 = 115^\circ 5.$$

Au point 5,

$$\lambda_5 = 90^\circ, \qquad \varphi_5 = 50^\circ 2, \qquad x_5 = 1.20, \qquad y_5 = 0.870;$$

la superficie de l'ovale équivaut aux $\frac{69}{100}$ du globe.

Exemple III : $\lambda_2 = 90°$.
La carte renferme les $\frac{31.2}{100}$ de la surface sphérique.

§ **152**. *Carte VIII.* — Soit choisi

$$p = \frac{M}{\cos^2 \frac{\lambda}{n}}.$$

Nous prendrons la notation

$$t = \frac{\lambda}{n}.$$

Il vient

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 2 \frac{M}{n} \cdot \frac{\sin t}{\cos^3 t}.$$

L'application des formules du § 149 donne pour les points à déformation nulle,
sur l'équateur,

$$p = 1. \qquad \cos^2 t_1 = M: \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

sur le nul méridien,

$$\cos \varphi_3 = p = M \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

La déformation le long des axes se calcule par

$$m_m = q' = \frac{\cos \varphi}{p} = \frac{1}{M} \cdot \cos \varphi \cos^2 t,$$

à l'origine

$$m_m = \frac{1}{M}.$$

Sur l'équateur

$$m_m = \frac{1}{M} \cdot \cos^2 t.$$

Le conjugué de l'origine est au point 2 donné par

$$m_m = M. \qquad \cos t_2 = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Sur le méridien central,

$$m_m = \frac{1}{M} \cos \varphi.$$

Le conjugué de l'origine est à la latitude φ_4 déterminée par

$$\cos \varphi_4 = M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Nous prendrons encore pour bordure de la carte l'équidéformée conjuguée de l'origine. Cette courbe a pour équation

$$\left(M - \frac{1}{M}\right)^2 = \left(M \cos^2 t \cos \varphi - \frac{1}{M \cos^2 t \cos \varphi}\right)^2$$

$$+ \operatorname{tg}^2 \varphi \,.\, \sin^2 t \cos^2 t \cdot \frac{4}{M^2 n^2} \cdot$$

Application numérique. — Imposons-nous la déformation au centre :

$$\omega = 19°30'; \qquad \text{d'où} \qquad M = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ce paramètre détermine immédiatement les quatre points

$$\varphi_4 = 60°, \qquad \varphi_5 = t_2 = 45°, \qquad t_1 = 33°.$$
$$y_4 = 1.225, \qquad y_5 = 1.$$

L'étendue en latitude est déterminée; l'étendue en longitude déterminera le second paramètre n.

Exemple : Soit $\lambda_2 = 127°$ (cas traité au § 151), il vient

$$n = \frac{\lambda_2}{t_2} = 2.83, \qquad x_2 = 2,$$

$$\lambda_1 = 33° \times n = 93°2, \qquad x_1 = 1.29.$$

La bordure de la carte a pour équation

$$2.5 = 2 \cos^2 \varphi \,.\, \cos_4 t + \frac{1}{2 \cos^4 t \cos^2 \varphi} + \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 t \cos^2 t.$$

Calculons les coordonnées du point 5 de longitude $\lambda_5 = 68°$:

$$t_5 = 24°, \qquad \cos^4 t = 0.70.$$

Il vient

$$\varphi_5 = 50°. \qquad y_5 = 0.805, \qquad x_5 = 0.890.$$

La carte a une superficie égale aux $\frac{48}{400}$ de la surface du globe.

Les équidéformées étudiées aux §§ 151 et 152 ont la forme indiquée à la figure 27.

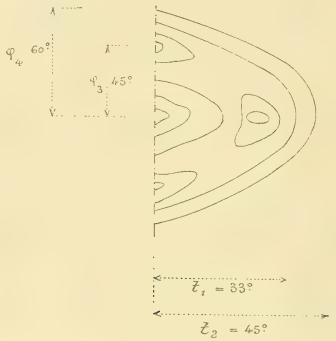


Fig. 27.

Remarque. — Pour les trois dernières cartes, nous nous sommes imposé des méridiens rectilignes et parallèles. Nous l'avons fait dans le but de simplifier les calculs et non pour donner à la carte des propriétés particulières.

Nous avons été amené à faire des calculs parce que, après avoir fait la carte de chacune des bandes, ces cartes partielles ne se raccordent pas; dans la pratique, le calcul est inutile lorsque le désaccord est de l'ordre des erreurs inévitables provenant du dessin.

Il va de soi que la même méthode est applicable lorsque l'axe de symétrie est un arc de petit cercle; mais dans ce cas, la mise en équation conduirait à des calculs plus compliqués.

Cartes intermédiaires.

Cartes équidistantes.

§ **153**. — 1° Carte de de l'Isles. Nous avons vu qu'on peut représenter la surface terrestre en deux cartes tronconiques avec

$$\Delta_1 = 1.185, \qquad \omega = 2°30'.$$

Il faut sacrifier deux zones polaires d'amplitude 25°. La surface ainsi sacrifiée

$$= 0.0937 = \frac{1}{10.7} \text{ de la sphère.}$$

§ **154**. — 2° Mappemonde en trois cartes. Une zone équatoriale et deux calottes polaires. L'échelle linéaire pour les méridiens doit être la même dans toute l'étendue de la mappemonde.

Pour la carte équatoriale, les équations sont

$$x = \lambda, \qquad y = n\varphi, \qquad \Delta_1 = \frac{1}{\cos \varphi_1}, \qquad \operatorname{tg}^2 T = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}}.$$

Pour les cartes polaires, les équations sont

$$\theta = \lambda, \qquad \rho = nz, \qquad \Delta_1 = \frac{z}{\sin z}, \qquad \operatorname{tg}^2 T = \frac{z}{\sin z}.$$

Pour qu'il y ait raccord le long de la bordure, il faut que les parallèles formant bordure soient à la même échelle.

Soit δ la colatitude de ce parallèle.

$$(m_p)_{\text{azimutale}} = n \times \frac{z}{\sin z} = n \frac{\delta}{\sin \delta}; \qquad (m_p)_{\text{cylindrique}} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sin \delta}.$$

La concordance des échelles exige donc que l'on ait $n\delta = 1$.

Premier cas. — Δ_s minimum.

$$\begin{cases} \text{azimutale} & \Delta_s = \dfrac{\delta}{\sin \delta}, \\ \text{cylindrique} & \Delta_s = \dfrac{1}{\sin \delta}. \end{cases}$$

La variation de S sera minimum si ces deux valeurs sont égales.

$$\frac{\delta}{\sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta}, \qquad \text{d'où} \quad \delta = 1 = 57°5, \qquad \text{d'où} \quad n = 1.$$

Donc la carte cylindrique est une carte carrée. A la bordure

$$m_p = \frac{1}{\sin 57°} = 1.185, \qquad \Delta_s = \frac{1}{\sin 57°} = 1.185,$$

$\operatorname{tg}^2 T = 1$ au pôle et à l'équateur.

A la bordure

$$\operatorname{tg}^2 T = 1.185, \qquad \text{d'où} \quad \omega = 4°40'.$$

§ **155.** *Deuxième cas.* — Déformation minimum.

$$\begin{cases} \text{cylindrique} & \operatorname{tg}^2 T = \dfrac{1}{\sqrt{\cos \varphi_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sin \delta}}, \\ \text{azimutale} & \operatorname{tg}^2 T = \dfrac{z}{\sin z} = \dfrac{\delta}{\sin \delta}. \end{cases}$$

L'égalité de ces altérations donne

$$\delta = \sqrt{\sin \delta}, \qquad \text{d'où} \quad \delta = 50° = 0.876,$$

mais $n\delta = 1$, d'où $n = 1.141$.

Sur la carte cylindrique, l'indicatrice est circulaire à la latitude donnée par

$$\cos \varphi = \frac{1}{n} = 0.876, \qquad \varphi = 28°;$$

à l'équateur.	$m_m = 1.141$	$m_p = 1$	$S = 1.141$	$\omega = 3°50'$
latitude 28°.	1.141	1.141	1.31	0
bordure. .	1.141	1.31	1.50	5°50′
pôle . . .	1.14	1.14	1.31	0

$$\text{d'où} \quad \Delta_s = \frac{1.50}{1.14} = 1.31.$$

Δ_s est plus grand que dans le cas précédent (§ 154), mais $\omega = 3°50'$ est plus petit que ci-dessus.

Carte de Tissot.

§ **156**. — La méthode de Tissot est exposée dans le tome XVIII des *Nouvelles Annales de mathématiques* (année 1879).

Pour faire la carte d'une région, il faut l'enfermer dans un contour simple, par exemple une ellipse. Je supposerai que le contour ait pour axes de symétrie deux orthodromies rectangulaires que je prends pour axes de coordonnées.

Je vais étudier la méthode de Tissot en appliquant à ce cas particulier sa méthode générale.

« Soient les fonctions x et y développées en série, et afin que » les calculs soient simplifiés, arrêtons-nous aux termes du troi- » sième ordre. »

Remarquons que la plupart des projections étudiées comportent des fonctions trigonométriques ou logarithmiques.

D'après ce que nous avons dit de la parité des fonctions y et z, il faut que

y renferme	φ	φ^3	λ^2	et	$\varphi\lambda^2$
x renferme	φ^2		λ λ^3	et	$\varphi^2\lambda$.

Soient donc

$$y = H\varphi + \frac{1}{3}A\varphi^3 + B\varphi\lambda^2$$

$$x = K\lambda + D\varphi^2\lambda + \frac{1}{3}E\lambda^3.$$

Calculons les dérivées

$$p = \frac{dx}{d\lambda} = \mathrm{K} + \mathrm{D}\varphi^2 + \mathrm{E}\lambda^2$$

$$q = \frac{dx}{d\varphi} = 2\mathrm{D}\varphi\lambda.$$

$$p' = \frac{dy}{d\lambda} = 2\mathrm{B}\varphi\lambda$$

$$q' = \frac{dy}{d\varphi} = \mathrm{H} + \mathrm{A}\varphi^2 + \mathrm{B}\lambda^2.$$

Calculons

$$m_m = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{p^2 + p'^2}, \qquad m_p = \sqrt{q^2 + q'^2}.$$

Tissot s'impose à l'origine $m_m = m_p = 1$.

Remarquons que la plupart des cartes étudiées précédemment comme étant les plus avantageuses ne donnent pas à l'origine $m_m = m_p = 1$.

Cette condition nous oblige à faire $\mathrm{H} = 1$ et $\mathrm{K} = 1$.

« Tissot s'impose ensuite que l'altération d'angle soit du » deuxième ordre en φ et λ, et que l'altération de longueur soit » du troisième ordre. »

Soit donc

$$a = 1 + \varepsilon^2, \qquad \sin\omega = \varepsilon^3,$$

ε représente un ∞^1 petit du premier ordre.

Les formules générales donnent

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{\mathrm{K}}}. \qquad a = \sqrt{\mathrm{K}} + \sqrt{\mathrm{L}}.$$

Les conditions seront satisfaites si l'on a

$$\begin{cases} \sqrt{\mathrm{K}} = 1 + \varepsilon^2. \ldots\ldots\ldots & \text{(I)} \\ \sqrt{\mathrm{L}} = \varepsilon^3 \ldots\ldots\ldots & \text{(II)} \end{cases}$$

La formule (21) donne

$$4\mathrm{K}\cos^2\varphi = (p + q'\cos\varphi)^2 + (p' - q\cos\varphi)^2.$$

La condition (I) exprime qu'il faut faire disparaître les termes du premier degré dans les parenthèses. On vérifie aisément que ces termes ont disparu par $H = K = 1$.

La formule (21) donne ensuite

$$4L \cdot \cos^2 \varphi = (p - q' \cos \varphi)^2 + (p' + q \cos \varphi)^2.$$

La condition (II) sera satisfaite si dans chaque parenthèse il n'y a pas de termes du deuxième ordre.

$$p - q' \cos \varphi = p - q' \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = 1 + D\varphi^2 + E\lambda^2 - 1 - A\varphi^2$$

$$- B\lambda^2 + \frac{\varphi^2}{2} + \text{termes du 4}^e \text{ ordre.}$$

Les termes du deuxième ordre disparaissent par

$$\begin{cases} \text{coeff. } \lambda^2 = 0. & E - B = 0 \ldots (1) \\ \text{coeff. } \varphi^2 = 0. & D - A + \frac{1}{2} = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

L'autre parenthèse donne

$$p' + q \cos \varphi = p' + q \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = 2B\varphi\lambda + 2D\varphi\lambda + \text{termes du 4}^e \text{ ordre.}$$

Les termes du deuxième ordre s'annulent si

$$B + D = 0. \ldots (3)$$

Les équations (1), (2), (3) déterminent les coefficients D, A, E en fonction de B.

Il vient alors

$$\begin{cases} y = \varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - B\right)\varphi^3 + B\varphi\lambda^2 \\ x = \lambda - B\varphi^2\lambda + \frac{1}{3} B\lambda^3. \end{cases}$$

En négligeant les termes du quatrième ordre,

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

alors x prend la forme

$$x = \lambda \cos \varphi + \left(\frac{1}{2} - B\right) \varphi^2 \lambda + B \varphi \lambda^2.$$

Il est inutile de vouloir abaisser l'ordre de a au-dessous du second. Et Tissot arrête ici ses calculs.

157. — Mais s'il avait continué à abaisser le degré de $\sin \omega$, il aurait bientôt reconnu le développement en série de la carte orthomorphe; pour cette carte, l'altération de longueur est toujours du second ordre, et l'altération d'angle est *nulle*.

§ **158.** — Nous allons montrer par un exemple que les cartes orthomorphes sont aussi avantageuses que les cartes de Tissot. Étudions la carte de l'Espagne. Dans une première carte, Tissot inscrit cette région dans une ellipse dont les axes sont dans le rapport $4 : 5$. Il obtient $\Delta_m = 1.0018$.

Faisons au contraire une carte azimutale orthomorphe; ce sera une calotte de rayon $5°10'$, et nous aurons

$$\Delta_m = \frac{1}{\cos^2 \xi} = 1{,}0020.$$

La carte de Tissot n'est donc pas plus avantageuse.

Dans la deuxième carte, Tissot inscrit l'Espagne entre deux cercles de latitude; il obtient alors une plus grande altération : $\Delta_m = 1.002454$.

Faisons une carte conique orthomorphe; nous obtenons $\Delta_m = 1.002342$.

Cette carte est donc préférable à celle de Tissot.

Conclusions. — Nous avons admis avec Tissot que la déformation doit être aussi petite que possible; nous avons satisfait à cette condition et nous avons fait une application à un cas traité par Tissot; nous en concluons que la carte orthomorphe est aussi avantageuse. Quant à la simplicité des formules de Tissot, en vue de simplifier les calculs, elle est illusoire. Les tables donnent aussi aisément les fonctions trigonométriques que les fonctions algébriques.

CHAPITRE XIV

Cartes azimutales discontinues.

§ **159**. — Soit à représenter une zone sphérique; la carte du premier groupe la plus avantageuse est une projection tronconique.

Mais il est des cas où le cartographe désire que les méridiens extrêmes de la carte se juxtaposent comme dans la projection azimutale.

Exemples : Carte de la périphérie de l'Asie; carte de la périphérie de l'Australie. Le centre de ces régions étant désertique, le cartographe admettra une discontinuité au centre de la carte. Si l'on admet cette discontinuité, la carte de la deuxième classe $\theta = \lambda$, $\rho = f(z)$, $\rho_0 = 0$ n'est pas la plus avantageuse. Nous en donnons deux exemples.

Carte authalique.

§ **160**. — Exemple I : La carte a pour équation

$$\theta = \lambda, \qquad \rho^2 = A - 2\cos z.$$

$$\left.\begin{aligned} (m_m)^2 &= \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \left(\frac{\sin z}{\rho}\right)^2, \\ (m_p)^2 &= \left(\frac{\rho}{\sin z}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad S = m_m\, m_p = 1.$$

Il suffit de calculer

$$m_m^2 = \frac{\sin^2 z}{A - 2\cos z}, \qquad (m_m^2)_{90} = \frac{1}{A}.$$

La carte azimutale $\rho_0 = 0$ donne $(m_m^2)_{90} = \frac{1}{2}$.

Je me fixe

$$(m_m^2)_{90} = \frac{1}{1.80}.$$

L'équation de la carte est alors $\rho^2 = 1.80 - 2\cos z$,

$$m_m^2 = \frac{\sin^2 z}{1.80 - 2\cos z},$$

pour

$$z = 90^\circ \qquad m_m^2 = 0.555 = \frac{1}{1.80},$$
$$z = 57^\circ \qquad m_m^2 = 1,$$
$$z = 57^\circ \qquad m_m^2 = 1.80.$$

Ainsi pour la zone $z = 57^\circ$ à $z = 90^\circ$, l'altération de longueur ne dépasse jamais $\Delta_m = 1.80$. La carte azimutale $\rho_0 = o$ aurait donné $\Delta_m = 2$.

Mais ρ s'annule pour $z = 26^\circ$. Le centre de la carte est discontinu. Le cartographe le masquera en y plaçant par exemple la légende.

Deuxième exemple numérique : Imposons-nous que la déformation soit nulle le long du parallèle de colatitude 60°. Il vient alors $A = 1.75$.

$m_m^2 = 2$ à la colatitude $39^\circ 10'$
$m_m^2 = \frac{1}{2}$ à la colatitude $96^\circ 30'$.

La superficie comprise entre les deux latitudes vaut les 0.444 de la surface de la sphère.

Carte équidistante.

§ **161.** — Exemple II : Considérons la carte

$$\theta = \lambda, \qquad \rho = k + z, \qquad \rho_0 \lesseqgtr 0, \qquad m_m = 1,$$
$$m_p = \frac{\rho}{\sin z} = \frac{k + z}{\sin z}.$$

Soit $k = 0.40$.

Pour

$$z = 90^\circ \qquad m_p = 1.17,$$
$$z = 80^\circ \qquad m_p = 1,$$
$$z = 68^\circ \qquad m_p = 0.855 = \frac{1}{1.17}.$$

La latitude 68° est conjuguée de l'équateur.

$$\Delta_m = \frac{(m_p)_{90}}{(m_p)_{60}} = \overline{1.17}^2 = 1.37.$$

Postel eût donné $\Delta_m = 1.57$.

$$\operatorname{tg}^2 T = \frac{m_p}{m_m} = 1.17.$$

Postel eût donné $\operatorname{tg}^2 T = 1.57$.

Ainsi cette projection convient très bien pour représenter la zone comprise entre les colatitudes $z = 68°$ et $z = 90°$.

ρ s'annule pour $z = 23°$, d'où nécessité de masquer le milieu de la carte.

Ces deux exemples suffisent pour montrer que, à ne considérer que le maximum d'altération locale, les cartes azimutales discontinues présentent des avantages incontestables et qu'il y aura souvent lieu de les appliquer à la représentation de certaines régions dont le centre peut être sacrifié, par exemple : la carte des pays riverains de l'Océan Atlantique nord, ou la carte agricole de l'Asie ou de l'Australie.

CHAPITRE XV

Conclusions de la première partie.

Le chapitre final de ce travail traite du choix des cartes; nous anticipons sur ce chapitre, en traitant ici cette question, pour le cas particulier où l'on n'a en vue que les altérations locales. Ce point de vue est le seul qui soit généralement étudié par les auteurs; nous aurons l'occasion de montrer plus loin que ce n'est pas le plus important.

Premier cas :

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche à réduire le plus possible le maximum d'altération, sans avoir égard à l'endroit où se produit ce maximum.

A. — *Mappemondes.*

Nous rappelons ici les exemples traités.

	Δ_m	Δ_s	ω
1. Une carte cylindrique orthomorphe donnant 0.86 du globe.	2		
2. Deux cartes orthomorphes azimutales .	2		
3. Deux cartes orthomorphes coniques donnant $\frac{63}{66}$ du globe	1.33		
4. Trois cartes orthomorphes.	1.25		
5. Une carte authalique cylindrique 0.866 du globe			19°40′
6. Deux cartes authaliques azimutales sans déchirure.			19°40′
7. Deux cartes authaliques avec déchirure angulaire.			9°50′
8. Deux cartes authaliques tronconiques donnant $\frac{24}{25}$ du globe			9°15′
9. Trois cartes authaliques			9°15′
10. Une carte équidistante cylindrique 0.866 du globe	2	2	9°50′
11. Deux cartes équidistantes tronconiques $\frac{40}{41}$ du globe	1.185	1.185	2°30′
12. Deux cartes équidistantes azimutales .	1.57	1.57	12°40′
13. Trois cartes équidistantes.	1.185	1.184	4°40′
14. Trois cartes équidistantes.	1.31	1.31	5°50′

B. — *Carte d'une région.*

C'est la forme du contour de la région qui est le seul guide dans le choix de la carte. Si le contour a une forme circulaire, on choisira une carte azimutale. Si la région est allongée suivant un petit cercle entier, une carte azimutale discontinue. Si elle s'étend suivant un arc de petit cercle, une carte tronconique. Si elle est allongée suivant un arc d'orthodromie, une carte cylindrique.

Pour le cas particulier où la carte doit être authalique, on préférera une carte azimutale quand la longueur ne dépasse pas 1.5 fois la largeur; on choisira une carte cylindrique quand la longueur dépasse 1.5 fois la largeur.

Deuxième cas :

On a égard à l'endroit où se produit le minimum d'altération.

Cette considération est souvent perdue de vue par les auteurs; elle est pourtant d'une grande importance; ainsi pour les cartes de l'Algérie, il convient le plus souvent que les régions voisines de la côte soient représentées avec le minimum d'altération; de même, pour les cartes de la Scandinavie, on s'efforcera de placer le minimum d'altération dans la partie méridionale.

Nous aurons l'occasion de montrer, à la cinquième partie de ce travail, que le choix le plus judicieux se fait en partageant préalablement la région en plusieurs fragments. Toutefois, les nombreux exemples étudiés nous fournissent dès à présent un assortiment varié de cartes, parmi lesquelles on pourra faire le choix.

Nous rappelons ci-dessus les cas étudiés pour les cartes authaliques; nous indiquons, pour mémoire, quelle est l'étendue qu'on peut représenter avec une déformation maximum de 19°30′.

1. Carte cylindrique, 0.866 du globe. Déformation nulle le long des parallèles à 22° de l'axe.

2. Carte azimutale, 0.500 du globe. Déformation nulle au centre.

3. Carte azimutale discontinue, 0.444 du globe. Déformation nulle au parallèle moyen.

4. Carte de Flamsteed modifiée, 0.58 du globe.

5. Carte de Flamsteed, 0.56 du globe. Déformation nulle le long des deux axes.

6. Carte de Werner, 0.26 du globe. Déformation nulle le long de l'axe.

7. Carte à méridiens elliptiques. Déformation nulle en deux points du méridien central.

8. Carte à parallèles elliptiques. Déformation nulle en deux points de l'axe des x.

9. Carte $y = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi$. Déformation nulle le long de l'équateur.

10. Carte $y = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$. Déformation nulle en deux points du méridien central.

11. Carte de Collignon.

12. Carte $x = M\lambda + N\lambda^3$. Déformation nulle en deux points de l'équateur.

13. Carte $x = M\lambda + \frac{1}{5} M\lambda^5$ } Déformation nulle en quatre points,
14. Carte $x = m \operatorname{tg} \frac{\lambda}{n}$ } deux points sur chacun des axes.

Les huit dernières cartes de ce tableau comportent un ou deux paramètres arbitraires. Cette énumération suffit pour montrer que le cartographe peut faire choix parmi une variété infinie de cartes.

DEUXIÈME PARTIE

PROJECTIONS SUR SURFACE DÉVELOPPABLE

§ **162**. — S'il s'agit de faire la carte d'une région très petite, la méthode la plus simple et qui se présente le plus naturellement à l'esprit est de faire une projection orthogonale. Alors

$$\Delta_m = \Delta_s = \operatorname{tg}^2 \mathrm{T} = \frac{1}{\cos z}.$$

Toutes ces altérations sont du second ordre.

S'il s'agit de faire la carte d'une région disposée suivant une zone sphérique, on pourra, par analogie, placer un cône tangent ou sécant à la sphère, de manière qu'il épouse le mieux possible la surface terrestre.

§ 163. — La représentation obtenue sera de la quatrième classe, $\theta = \lambda n$, $\rho = f(z)$.

Le coefficient n ne dépend que de l'acuité du cône. En effet, soit h l'angle au sommet du cône; g la génératrice (fig. 28).

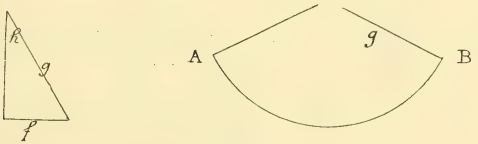


Fig. 28.

Le cercle de base a pour circonférence

$$2\pi f = 2\pi g \sin h.$$

Sur la carte, la ligne AB a pour longueur

$$AB = 2\pi g\, n, \qquad \text{d'où} \quad n = \sin h.$$

§ 164. — Quand le cône est sécant à la sphère suivant les parallèles de colatitude v et w, on a

$$\cos\left(\frac{v+w}{2}\right) = \sin h = n \quad \text{(fig. 29).}$$

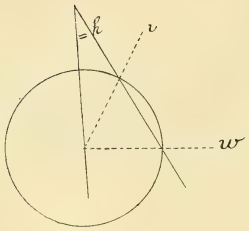


Fig. 29.

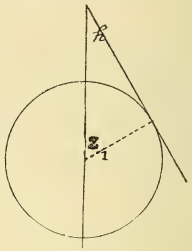


Fig. 30.

Si le cône est tangent suivant le parallèle de colatitude z_1, il vient $\cos z_1 = \sin h = n$. Sur la carte, le parallèle de tangence est un cercle de rayon $\rho_1 = \operatorname{tg} z_1$ (fig. 30).

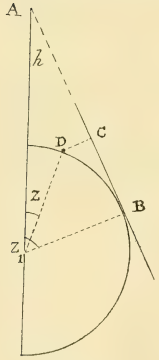


Fig. 31.

Projection orthographique épiconique.

§ 165 — Soit un cône tangent le long du parallèle de colatitude z_1.

$$\rho = AB = \operatorname{tg} z_1 - BC \quad \text{(fig. 31)},$$

$$BC = \sin(z_1 - z),$$

d'où

$$\rho = \operatorname{tg} z_1 - \sin(z - z_1),$$

$$m_m = \frac{d\rho}{dz} = \cos(z - z_1),$$

$$m_p = n\frac{\rho}{\sin z} = \cos z_1 \frac{\rho}{\sin z} = \frac{1}{\sin z}[\sin z_1 - \cos z_1 \sin(z - z_1)].$$

Le long du parallèle z_1, on a $m_m = m_p = 1$.

Les conditions de l'authalisme ou de l'orthomorphie ne peuvent être mises sous une forme simple.

Cette projection n'est pas étudiée par les auteurs.

Cas limites :

I $h = 90°$. $n = 1$. Projection orthographique $\rho = \sin z$.

II. $h = 0°$. $n = o$. Projection cylindrique authalique.

§ 166. — Germain a étudié une projection épiconique où les projetantes sont parallèles à l'équateur.

Murdoch a étudié une projection où les projetantes sont issues du centre du globe.

§ 167. — D'autres représentations peuvent s'interpréter comme projections épiconiques.

I. Projection équidistante simplifiée :

$$BA' = \text{arc } BA \text{ (fig. 32)}.$$

$$\rho = \operatorname{tg} z_1 + z - z_1, \quad \theta = \lambda \cos z_1.$$

II. Projection de Stromeyer :

$$CA' = CA = \rho \quad \text{(fig. 33)}.$$

Mais il faut alors donner de l'extension au mot « projection » ; en réalité, il n'y a que les méridiens qui soient vraiment projetés.

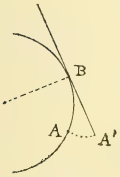


Fig. 32.

§ **168.** — La manière de placer le cône par rapport à la sphère et la façon de projeter les points du globe sur le cône ne permettent pas de prévoir quelles seront les altérations.

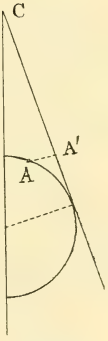


Fig. 33.

Par exemple la projection cylindrique orthographique est authalique, tandis que la projection orthographique azimutale ne l'est pas.

Autre exemple : La projection orthomorphe azimutale est une perspective avec le point de vue à l'antipode de la carte, tandis que la carte cylindrique orthomorphe s'exprime par une fonction logarithmique.

Il est beaucoup de cartes qui ne peuvent s'interpréter comme projections épiconiques. Telle la projection d'Albers IV_2.

Certains auteurs vont jusqu'à considérer la projection de Boone comme une projection conique modifiée. De même, la projection de Flamsteed serait une projection cylindrique modifiée.

Cette assimilation est tout artificielle. Elle amène à classer dans deux catégories différentes la carte de Flamsteed et celle de Mollweide. Cependant ces deux systèmes ont entre eux beaucoup de parenté.

§ **169.** — On peut s'étonner que les auteurs n'aient pas cherché à projeter sur une surface développable disposée autrement; par exemple sur une surface cylindrique à base elliptique.

§ 170. — Nous avons vu qu'un cercle infiniment petit de la sphère est représenté sur la carte par une ellipse. On peut toujours placer la carte par rapport au globe de manière que le cercle et l'ellipse soient deux sections du même cône; alors la carte est une perspective pour le point considéré. Cette remarque, empruntée à Tissot, est sans aucune conséquence pratique.

§ **171.** Conclusions. — Ni pour exposer la théorie des représentations cartographiques, ni pour en établir de nouvelles, il ne convient de les considérer comme des projections sur surface développable.

TROISIÈME PARTIE

ALTÉRATIONS INTÉGRALES

CHAPITRE PREMIER

Échelle de superficie.

§ **172**. — Nous avons étudié le rapport entre les valeurs extrêmes de l'échelle élémentaire de superficie, nous l'avons désignée par Δ_s.

Un renseignement plus utile à connaître est le rapport entre les valeurs extrêmes de l'échelle de superficie pour des portions finies; ainsi, sur une carte d'Europe, il est plus important de connaître le rapport entre l'échelle de l'Espagne et l'échelle de l'Allemagne, que le rapport des échelles de la Belgique et de la Serbie.

Ce rapport peut toujours s'obtenir par le calcul intégral. Nous traiterons seulement un exemple simple par un procédé plus rapide.

§ **173**. — Soit une carte azimutale représentant une calotte de 60°. Nous avons calculé Δ_s pour les diverses projections.

Partageons cette calotte sphérique en deux parties d'égale superficie par un cercle de latitude. C'est le cercle de colatitude 41°5 déterminé par

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} \sin^2 60° = 0.125.$$

Considérons ensuite les diverses cartes et calculons le rapport sur la carte, de ces deux surfaces :

1° la calotte $\rho_{41.5}$;
2° la couronne circulaire comprise entre $\rho_{41.5}$ et ρ_{60}.

Nous représentons ce rapport par $[\Delta_s]$.

§ **174**. — Opérons de même pour les cartes cylindriques. Sur la sphère, partageons la zone 0° — 60° en deux zones d'égale superficie par le parallèle de latitude 25°40′ et mesurons, sur la carte, le rapport de ces deux zones.

		$\frac{[\Delta_s]}{}$	$\frac{\Delta_s}{}$
Orthographique	$\rho = \sin z$	1.41	2
	$\rho = 3 \sin \frac{z}{3}$	1.06	1.115
Postel	$\rho = z$	1.09	1.21
Breusing	$\rho = \frac{2 \sin \xi}{\sqrt{\cos \xi}}$	1.13	1.345
	$\rho = 3 \operatorname{tg} \frac{z}{3}$	1.20	1.45
Orthomorphe	$\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}$	1.33	1.78
Gnomonique	$\rho = \operatorname{tg} z$	2.82	8
Carrée	$y = \varphi$	1.33	2
Mercator	. . .	1.85	4
Perspective	$y = \operatorname{tg} \varphi$	2.61	8

Il n'apparaît aucune relation entre Δ_s et $[\Delta_s]$. Sinon que les cartes se rangent de même, en considérant Δ_s ou en considérant $[\Delta_s]$.

CHAPITRE II

Échelle linéaire.

§ **175**. — Soit tracée sur la carte une orthodromie ; pour chaque élément de l'orthodromie, on peut calculer l'échelle linéaire élémentaire et, par une intégration, calculer la longueur sur la carte de l'orthodromie. Mais ce n'est pas ce qui nous intéresse, car pour connaître la distance entre deux points de la

carte, on mesure la distance en ligne droite; donc la distance doit être calculée par la formule

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

§ **176.** — Pour rendre sensible la variation de l'échelle linéaire intégrale, nous proposons de dessiner sur la carte un petit cercle de la sphère. Nous lui donnerons le nom d'*indicateur*.

Quel doit être le rayon de l'indicateur? Pour le déterminer, considérons que si l'on veut connaître la distance Liége-Ostende, on fera cette mesure sur la carte de Belgique et non sur la carte d'Europe, autrement dit, sur une carte dont la plus grande dimension est $n°$, on mesure rarement des distances inférieures à $\frac{1}{2}\ n°$.

Il paraît rationnel de choisir un rayon d'indicateur compris entre n et $\frac{1}{2}\ n$.

Les recherches que nous avons faites ne concernent que les cartes azimutales.

Cartes azimutales de 60°.

§ **177.** — Indicateur de 60°.

A. Plaçons le centre de l'indicateur à la bordure de la carte, en A (fig. 34).

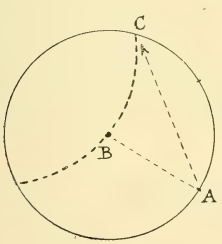


Fig. 34.

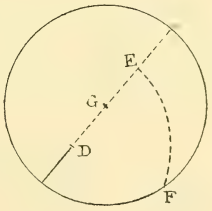


Fig. 35.

Les valeurs extrêmes à calculer sont AB $= \rho_{60}$ et AC.

$$\text{Angle ABC} = \arccos\frac{1}{3} = 70°5,$$

d'où

$$AC = AB \times 2\cos 35°25 = AB \times 1.63.$$

B. Plaçons le centre de l'indicateur en D, à mi-distance du centre et de la bordure (fig. 35).

Les vecteurs à calculer sont DE et DF.

$DE = 2 \times \rho_{30}$. L'angle DGF vaut $81° = \arccos 0.1545$.

$$\overline{DF}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{FG}^2 - 2 \cdot DG \cdot GF \cdot \cos 81° = \overline{DG}^2 + \overline{GF}^2$$
$$- 0.309\ DG \cdot GF = \rho_{30}^2 + \rho_{60}^2 - 0.309 \cdot \rho_{30}\,\rho_{60}.$$

Notation : $[\Delta_m]$ = rapport entre les valeurs extrêmes du rayon de l'indicateur.

	Orthog.	Authal.	$3\sin\frac{z}{3}$.	Postel.	Breusing.	$3\,\mathrm{tg}\frac{z}{3}$.	Orthomorphe.	Gnomon.
AB	0.866	1.000	1.025	60	1.075	1.09	1.155	1.73
AC	1.41	1.630	1.67	98	1.75	1.775	1.88	2.82
DE	1.00	1.035	1.040	60	1.05	1.059	1.07	1.155
DF	0.93	1.054	1.089	62.5	1.12	1.135	1.20	1.74
$[\Delta_m]$	1.63	1.63	1.63	1.63	1.66	1.68	1.755	2.44
Pour mémoire :								
Δ_m	2	1.33	1.26	1.21	1.238	1.26	1.35	4

Conclusions : La connaissance de Δ_m ne permet pas de présumer la valeur de $[\Delta_m]$. Ainsi pour toutes les projections depuis $\rho = \sin z$ jusque $\rho = z$, Δ_m varie depuis 1.21 jusque 2, tandis que $[\Delta_m]$ est constamment égal à 1.63.

Cartes azimutales d'un hémisphère.

§ 178. — *A.* Indicateur de 90°.

A_1, centre de l'indicateur en D à la bordure de la carte (fig. 36); valeurs extrêmes BA et BD.

$$BA = \rho_{90},$$
$$BD = BA \times \sqrt{2} = \rho_{90}\sqrt{2}.$$

A_2, centre de l'indicateur en H à 45° du pôle; valeurs extrêmes : HK et HD (fig. 37).

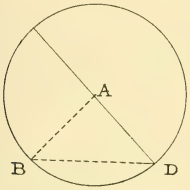


Fig. 36.

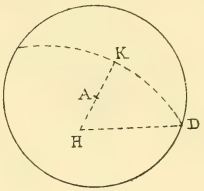


Fig. 37.

$$HK = 2\rho_{45},$$
$$HD = \sqrt{\overline{HA}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{\rho_{45}^2 + \rho_{90}^2}.$$

B. Indicateur de 135°. Le contour est un petit cercle de rayon 45°.

B_1, centre de l'indicateur en B à la bordure de la carte; valeurs extrêmes : BK et BC (fig. 38).

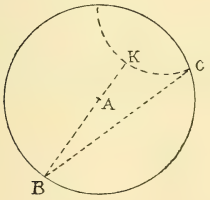


Fig. 38.

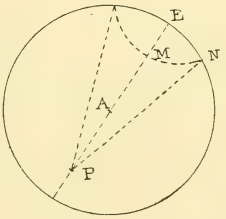


Fig. 39.

$$BK = \rho_{90} + \rho_{45},$$
$$BC = 2 \times AB \times \sin\frac{1}{2}135° = \frac{3}{2}.\,AB \times 1.235.$$

Puisque l'échelle de BC est intermédiaire entre l'échelle de BA et celle de BD, il est inutile de la calculer. De même, l'échelle de BK est toujours comprise entre celle de BA et celle de HK.

B_2, centre de l'indicateur en P, à 67° 1/2 du pôle; valeurs extrêmes : PM et PN (fig. 39).

$$PM = 2\rho_{67.5}.$$

$$\overline{PN}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AN}^2 + 2PA\ PN \cos EN.$$

$$EN = 41°.$$

$$\overline{PN}^2 = \rho_{67}^2 + \rho_{90}^2 + 2\rho_{67}\,\rho_{90} \times 0.751.$$

		Orthog.	Authal.	$3 \sin \frac{z}{3}$.	Postel.	Breusing.	$3 \operatorname{tg} \frac{z}{3}$.	Orthom.
90°	BA	0.637	0.900	0.955	1	1.07	1.101	1.272
	BD	0.900	1.27	1.35	1.414	1.51	1.56	1.80
	HK	0.900	0.975	0.99	1	1.01	1.025	1.052
	HD	0.780	1.025	1.08	1.12	1.185	1.218	1.375
150°	PM	0.785	0.940	0.975	1	1.03	1.055	1.13
	PN	0.770	1.005	1.06	1.095	1.06	1.188	1.33
	$[\Delta_m]$ =	1.41	1.41	1.41	1.41	1.50	1.52	1.71

Pour mémoire :

Δ_m =	∞	2	1.73	1.57	168.5	1.73	2

Mêmes conclusions qu'au paragraphe précédent : $[\Delta_m]$ est le même pour les quatre projections depuis $\rho = \sin z$ jusque $\rho = z$.

Aucune relation n'apparaît entre Δ_m et $[\Delta_m]$.

Cartes azimutales de 120°.

§ 179. — *A.* Indicateur de 90°.

A_1, centre de l'indicateur à la bordure, en B (fig. 40). L'indicateur serait le même si on plaçait le centre en B'.

Les vecteurs à calculer sont BC, B'C, BD, B'D.

L'angle CAD = 109°5.

$$BC = BA - AC = \rho_{120} - \rho_{30},$$
$$B'C = AC + AB' = \rho_{30} + \rho_{60},$$
$$BD = 2\rho_{120} \sin \tfrac{1}{2} 109° = 2.18\,\rho_{120},$$
$$\overline{B'D}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB'}^2 - 2AD.AB' \cos B'AD$$
$$= \rho_{120}^2 + \rho_{60}^2 - 2\rho_{120}\rho_{60} \cos 70°5.$$

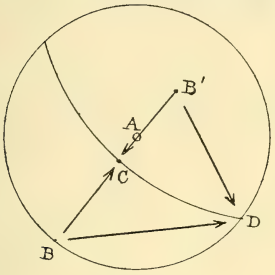


Fig. 40.

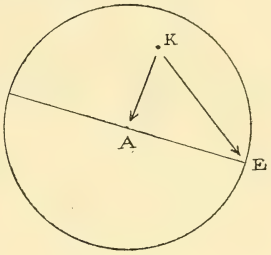


Fig. 41.

A_2, centre de l'indicateur à 90° du pôle, en K (fig. 41).
Les vecteurs à calculer sont AK et KE.

$$AK = \rho_{90}.$$
$$\overline{KE}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AE}^2 = \rho_{90}^2 + \rho_{120}^2.$$

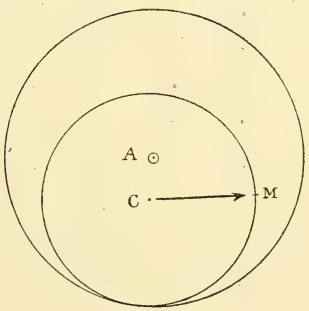


Fig. 42.

A_3, centre de l'indicateur en C à 30° du pôle (fig. 42).

Le seul vecteur à calculer est CM.

$$\overline{CM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM}^2 = \rho_{90}^2 + \rho_{30}^2.$$

Notations :

$$\frac{\rho_{90}}{90} = v, \quad \frac{\rho_{120}}{120} = p, \quad \frac{\rho_{30}}{30} = q, \quad \frac{\rho_{60}}{60} = t.$$

Les échelles des vecteurs sont

$$BC = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}q, \qquad \overline{B'D}^2 = 1.78p^2 + 0.445t^2 - 0.593pt,$$

$$B'C = \frac{1}{3}q + \frac{2}{3}t, \qquad AK = v,$$

$$BD = 2.18p, \qquad \overline{KE}^2 = v^2 + 1.78p^2, \qquad \overline{CM}^2 = v^2 + \frac{1}{9}q^2.$$

	Authal. —	$3\sin\frac{z}{3}$ —	Postel. —	Breusing. —	$3\,\mathrm{tg}\frac{z}{3}$ —	Orthom. —
BC	0.77	0.894	1	1.22	1.263	1.859
B'C	0.967	0.986	1	1.02	1.032	1.08
BD	1.795	2	2.18	2.55	2.62	3.62
B'D	1.071	1.185	1.28	1.48	1.52	2.09
KE	1.414	1.55	1.665	1.89	1.94	2.56
CM	0.955	1.01	1.055	1.12	1.152	1.515
AK	0.900	0.956	1	1.07	1.101	1.274
$[\Delta_m] =$	2.33	2.27	2.18	2.53	2.54	3.35
Pour mémoire, $\Delta_m =$	4	2.90	2.42	2.83	2.90	4

Donc il n'y a aucune liaison entre Δ_m et $[\Delta_m]$.
Le minimum de $[\Delta_m]$ est donné par la projection de Postel.

§ 180. — Nous avons dit que pour les cartes d'amplitude 120°, l'indicateur doit varier depuis 120° jusque 180°.

B. Indicateur de 120°.

B_1, centre à la bordure en B (fig. 43).
Vecteurs à calculer : BA, BF.

$$BA = \rho_{120}, \qquad BF = 2\rho_{120}.$$

Ainsi la variation de l'échelle sera au moins égale à 2.

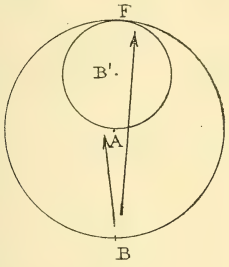


Fig. 43.

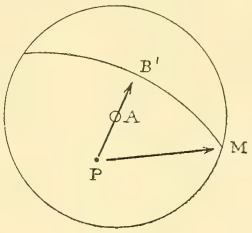


Fig. 44.

B_2, centre à 60° du pôle, en P (fig. 44).
Vecteurs à calculer : PB′ et PM.

$$PB' = 2\rho_{60}.$$

$$\overline{PM}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AM}^2 + 2AP.AM.\cos MAB'.$$

L'échelle de PM est donc

$$\sqrt{\frac{1}{4}t^2 + p^2 + \frac{1}{5}pt}.$$

C. Indicateur de 150°.

C_1, centre à la bordure, en B (fig. 45).
Vecteurs à calculer : BH, BK.

$$BH = \rho_{120} + \rho_{30}, \qquad \text{échelle} = \frac{4}{5}p + \frac{1}{5}q,$$

$$BK = \rho_{120} + \rho_{90}, \qquad \text{»} \qquad \frac{3}{5}v + \frac{4}{5}p.$$

C_2, indicateur à la bordure.
Vecteurs à calculer : NB′ et NF (fig. 46).

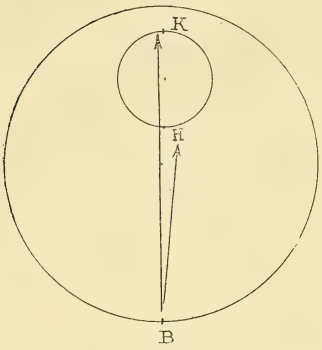


Fig. 45.

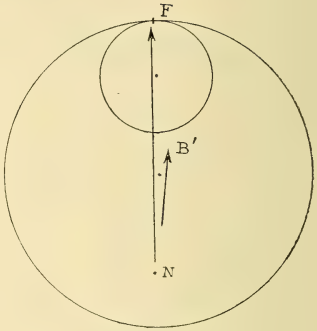


Fig. 46.

$$NB' = \rho_{30} + \rho_{60}, \qquad \text{échelle} = \frac{3}{5}v + \frac{2}{5}t,$$

$$NF = \rho_{90} + \rho_{120}, \qquad \text{»} \qquad \frac{3}{5}v + \frac{4}{5}p.$$

D. Indicateur de 180°, c'est-à-dire distance d'un point à son antipode.

Plaçons-les tous deux sur un diamètre.

D_1, un point à la bordure ; son antipode à 60° du pôle.

$$\text{Distance} = \rho_{120} + \rho_{60}, \qquad \text{échelle} = \frac{2}{3}p + \frac{1}{5}t.$$

D_2, les deux antipodes à 90° du pôle.

$$\text{Distance} = 2\rho_{90}, \qquad \text{échelle} = v.$$

		Authal.	$3 \sin \frac{z}{3}$.	Postel.	Breusing.	$3 \operatorname{tg} \frac{z}{3}$.	Orthom.
Indicateur 120°.	p	0.825	0.920	1	1.17	1.20	1.66
	$2p$	1.65	1.84	2	2.34	2.40	3.32
	t	0.955	0.98	1	1.03	1.04	1.105
	$\sqrt{\frac{t^2}{4} + p^2 + \frac{1}{3}pt}$	1.08	1.175	1.26	1.43	1.46	1.92
Indicateur 150°.	v	0.900	0.955	1	1.07	1.101	1.275
	$\frac{4}{5}p + \frac{1}{5}q$	0.858	0.935	1	1.14	1.162	1.53
	$\frac{3}{5}v + \frac{4}{5}p$	1.195	1.508	1.4	1.57	1.62	2.09
	$\frac{3}{5}v + \frac{2}{5}t$	0.922	0.964	1	1.053	1.076	1.207
Ind. 180°.	v	0.900	0.955	1	1.07	1.101	1.275
	$\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}t$	0.868	0.941	1	1.12	1.147	1.473
	$[\Delta_m] =$	2	2	2	2.27	2.25	3
Pour mémoire,	$\Delta_m =$	4	2.90	2.42	2.83	2.90	4

Nous constatons encore une fois qu'il n'y a aucune relation entre Δ_m et $[\Delta_m]$. Les projections depuis $\rho = 2 \sin \frac{1}{2} z$ jusque $\rho = z$ ont toutes le même $[\Delta_m]$.

Cette valeur de $[\Delta_m]$ est plus petite que celle obtenue par l'indicateur de 90°, lequel donne $[\Delta_m] = 2.18$ au moins.

Échelle cartographique.

§ **181.** — Nous appellerons échelle cartographique, la graduation placée en annexe d'une carte et qui sert à mesurer les distances sur la carte.

Considérons un cas simple : une carte authalique d'amplitude 60°. Nous avons vu, § 177, que pour cette carte $\Delta_m = 1.33$, $[\Delta_m] = 1.63$.

Soit donc dessinée une carte où un degré au centre mesure $1^{mm}745$, alors AB mesure 100 millimètres et AC mesure 163 millimètres (fig. 34). A la périphérie de la carte, un degré mesure $1.745 \times 1.33 = 2^{mm}32$.

Quelle graduation faut-il annexer à la carte?

Première méthode : atlas allemands. — Échelle cartographique = échelle élémentaire au centre de la carte. $1° = \underline{1^{mm}745}$.

a) Au centre, $1° = 1°$, erreur nulle.

b) A la bordure, $1° = \frac{2^{mm}32}{1^{mm}745} = 1°33$, erreur = 33 °/₀.

c) AB mesure $\frac{100}{1.745} = 57°5$, » 4.5 °/₀.

d) AC mesure $\frac{163}{1.745} = 93°5$, » 56 °/₀.

Deuxième méthode : carte d'Espagne de Tissot. — Échelle cartographique = échelle au centre $\times \sqrt{\Delta_m}$.

$1° = 1.745 \times \sqrt{1.33} = \underline{2^{mm}015}$.

a) Au centre, $1° = \frac{1.745}{2.015} = 0°865$, erreur = 15.5 °/₀.

b) A la bordure, $1° = \frac{2.32}{2.01} = 1°155$, » 15.5 °/₀.

c) AB mesure $\frac{100}{2.01} = 49°6$, » 21 °/₀.

d) AC mesure $\frac{163}{2.01} = 81°$, » 35 °/₀.

Par cette méthode, l'erreur maximum est diminuée.

Troisième méthode. — La méthode que nous proposons consiste à prendre pour échelle cartographique la moyenne géométrique entre l'échelle intégrale de AC et l'échelle intégrale de AB. Soit donc $60° = \sqrt{100 \times 163} = 128$ millimètres. $1° = \underline{2^{mm}13}$.

a) Au centre, $1° = \frac{1.745}{2.13} = 0°82$, erreur = 22 °/₀.

b) A la bordure, $1° = \frac{2.52}{2.13} = 1°09$, » 9 °/₀.

c) AB mesure $\frac{100}{2.13} = 47°$, » 28 °/₀.

d) AC mesure $\frac{163}{2.13} = 76°5$, » 28 °/₀.

Cette graduation donne pour la mesure des grandes distances l'erreur la plus petite. Cette erreur, en °/₀, se calcule par

$$\sqrt{[\Delta_m]} - 1.$$

Pour les cartes azimutales représentant un hémisphère (§ 178) l'erreur est de 19 °/₀ pour les distances comprises entre 90° et 180°.

Cartes de 120° : Distances de 120° à 180°. Erreur

$$= \sqrt{2} - 1 = 41\ °/₀.$$

CHAPITRE III

Écart orthodromique.

§ 182. — Il est une altération intégrale que l'étude des altérations locales ne laisse pas entrevoir : une orthodromie est, en général, représentée sur la carte par une ligne courbe. Nous nous proposons de mesurer de combien cette courbe s'écarte de la ligne droite; quand la distance est infiniment petite, cet écart est nul; quand la distance est de 180°, l'écart ne peut être evalué, car il est une infinité de chemins orthodromiques joignant deux antipodes. Nous ne considérons que des distances de 90°, et, pour simplifier les calculs, nous placerons les extrémités à la même latitude.

Cartes où les parallèles sont rectilignes et parallèles.

Exemple I : L'écart est nul à l'équateur; si la carte s'étend jusqu'à la latitude 60°, on peut tracer une orthodromie de 90° tangente au bord de la carte et aboutissant à deux points situés à la latitude de 38°. L'écart est donc au moins de

$$60° - 38° = 22°.$$

Cartes azimutales.

Exemple II : L'écart augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre; soit une carte représentant un hémisphère; une orthodromie de 90° à la bordure de la carte est telle que la flèche vaut 0.414 de la corde.

Cette flèche s'évalue en degrés par l'équation de la carte :

I. Carte authalique : $\rho = 2 \sin \frac{1}{2} z$, écart = 30°.

II. $\rho = 3 \sin \frac{1}{3} z$, » 28°.

III. Postel : $\rho = z$, » 26°5.

IV. $\rho = 3 \operatorname{tg} \frac{z}{3}$, » 24°.

V. Stéréographique, » 19°4.

VI. Orthographique, » 45°.

C'est donc, pour le cas considéré, la carte orthomorphe qui donne le plus petit écart.

Nous aurons l'occasion de mesurer cet écart sur d'autres cartes.

QUATRIÈME PARTIE

USAGE DES CARTES GÉOGRAPHIQUES. CHOIX D'UN SYSTÈME DE PROJECTION

CHAPITRE PREMIER

Globes terrestres.

§ **183.** — Le globe terrestre est une représentation exacte, à une échelle déterminée, des accidents planimétriques de la surface terrestre.

Voyons comment on peut résoudre sur un globe terrestre certains problèmes qui se présentent lorsque l'on traite des questions de géographie. Pour la facilité de l'exposition, ces problèmes seront énoncés sous forme concrète.

Premier problème. — Mesurer la distance Londres-Shanghaï.

Solution : Prendre au compas la distance de ces points et la reporter sur un grand cercle gradué.

Deuxième problème. — Mesurer la longitude et la latitude de Lyon.

Solution : Lyon apparaît dans un trapèze curviligne formé par les deux méridiens voisins et les deux parallèles voisins. En s'aidant des côtés de ce trapèze, on pourra résoudre le problème avec beaucoup d'exactitude. (Interpolation graphique.)

Problème analogue. — Comparer la latitude de Lyon à celle de San-Francisco.

Troisième problème. — Tracer l'orthodromie Londres-Shangaï.

Solution : Au moyen d'un appareil auxiliaire mobile qui se

compose essentiellement d'un grand cercle de la sphère, faire passer un grand cercle par les deux points donnés et tracer l'itinéraire.

Ce problème ne demande jamais une grande précision; en effet, si l'on se propose de tracer un itinéraire de navire, il faudra que le navire s'écarte de l'orthodromie pour tenir compte des courants marins et des vents; ainsi, par exemple, la route Yokohama-San-Francisco diffère de la route San-Francisco-Yokohama. Et si l'on trace un itinéraire sur terre ferme, il faudra encore s'écarter de l'orthodromie afin de passer par certaines villes, éviter les régions de moindre viabilité, etc.

Quatrième problème. — Mesurer l'azimut de la direction Ostende-Douvres.

Solution : Cet angle se mesure à vue.

Si la direction est déterminée par deux points éloignés, la question n'est posée que si l'on fixe que c'est la loxodromie ou l'orthodromie, ou tout autre courbe joignant les deux points.

Problème analogue. — Mesurer l'angle de deux directions.

Cinquième problème. — Tracer la loxodromie Londres-Shanghaï.

Nous estimons que ce problème n'est d'aucune utilité; nous ne connaissons aucun phénomène ayant quelque rapport avec la loxodromie; et il faut remarquer que les itinéraires de navires ne sont pas des loxodromies.

Sixième problème. — Mesurer la superficie de la Chine. Le réseau des parallèles et méridiens partage le pays en trapèzes dont on calcule aisément la surface. Le procédé est aussi précis qu'on le veut; il suffit de diminuer la grandeur des trapèzes-unités.

Problème analogue. — Comparer la superficie de la Chine à celle de la Sibérie.

Remarque. — Le globe terrestre ne peut jamais fournir des indications de grande précision, car, en général, le dessin est

imprimé sur du papier découpé en fuseaux, lesquels sont ensuite collés sur une surface sphérique.

Il va sans dire que quand on désire une plus grande précision, il faut recourir au calcul trigonométrique.

CHAPITRE II

Usage des cartes.

§ **184.** — Nous ne définirons pas une carte : « une représentation d'une partie de la surface terrestre », car on n'a jamais l'impression qu'on a sous les yeux une portion de la surface terrestre.

Nous définirons la carte : « un dessin plan fournissant certains renseignements géographiques relatifs à une portion (ou à la totalité) de la surface terrestre.

Cette définition nous fait entrevoir que le marin, l'ingénieur, l'agronome, le militaire ne se servent pas des mêmes cartes; et, d'autre part, nous sommes avertis qu'il ne faut pas prendre sur une carte les renseignements qu'elle n'est pas destinée à nous fournir.

Solution des six problèmes fondamentaux.

§ **185.** — Quel que soit le système cartographique, toutes les cartes qui portent le réseau des parallèles et méridiens permettent de résoudre les problèmes n° 2 et n° 6 (mesurer les coordonnées d'un point, mesurer une superficie) par les mêmes procédés que lorsqu'on se sert d'un globe terrestre.

Lorsque la carte est authalique, on peut, à l'aide d'un planimètre, mesurer une superficie avec précision.

Problème n° 1. — Mesurer la distance Londres-Shanghaï.

Aucune carte ne donne une solution pratique de cette question. Certains auteurs expliquent comment on peut faire cette mesure sur une carte autogonale. Il faut pour cela :

1° Tracer l'orthodromie qui joint les deux points;

2° Partager l'itinéraire ainsi tracé en un grand nombre de parties; calculer l'échelle linéaire pour chaque portion; mesurer la longueur de chaque portion et additionner.

Il n'y a pas lieu d'admettre ce procédé; on aurait plus tôt fait de calculer par la trigonométrie la distance des deux points après avoir mesuré leurs coordonnées géographiques λ, φ.

Problème n° 3. — Tracer l'orthodromie Londres-Shanghaï.

Une carte gnomonique donne une solution simple: il suffit de joindre les deux points par une droite.

Problème n° 4. — Mesurer un angle.

Les cartes orthomorphes permettent de mesurer l'angle au rapporteur. La mesure des azimuts est facilitée quand les méridiens sont rectilignes.

Problème n° 5. — Tracer la loxodromie Londres-Shanghaï.

La carte de Mercator donne une solution simple : il suffit de joindre les deux points par une droite.

De cette rapide étude, nous concluons :

1° Aucune carte ne peut servir à mesurer les distances;

2° Les cartes authaliques et les cartes orthomorphes paraissent être les plus utiles;

3° Il faut signaler aussi la carte gnomonique et la carte de Mercator.

§ 186. — Proposons-nous de résoudre le problème : Étant donné le cadre d'une carte, quelle est la portion de sphère qu'on peut y représenter?

Supposons que le cadre est un carré; traçons sur le globe deux orthodromies perpendiculaires et, à partir de leur intersection, portons sur chaque bras de la croix une même distance, 60° par exemple. Nous déterminons ainsi les quatre coins de la carte; il reste à déterminer de quelle manière nous pouvons joindre ces quatre coins.

Exemple I : Joignons les coins par des orthodromies. Nous formons ainsi une figure ayant à chaque coin un angle

$$126°50' = 2 \operatorname{arc\,tg} 2.$$

L'apothème vaut arc tg $\sqrt{1.5}$ = 50°75 = les 0.845 de la demi-diagonale.

Pour que le cadre de la carte soit un carré, il faut la carte gnomonique. L'angle de 126° est représenté par un angle droit. Le rapport de l'apothème à la demi-diagonale est 0.707 au lieu de 0.845.

Exemple II : Joignons deux coins consécutifs par un arc de petit cercle parallèle à la bissectrice des diagonales. Nous formons une figure ayant à chaque coin un angle de 53° = 2 arc tg 0.5. L'apothème vaut 38° = 0.633 de la demi-diagonale.

Pour que ce cadre soit représenté par un carré, il faut une carte orthographique.

Exemple III : Dessinons à chaque coin un angle droit, dont les côtés sont un arc de petit cercle; l'apothème vaut 44°5, soit les 0.74 de la demi-diagonale.

Ce cadre sera représenté par un carré si la carte est stéréographique.

Remarque. — Dans l'exemple I, pour tracer sur le globe le cadre de la carte, il faut tracer l'intersection de la sphère avec une pyramide ayant son sommet au centre de la sphère.

Dans l'exemple II, c'est l'intersection de la sphère avec un prisme droit à base carrée.

Dans l'exemple III, c'est l'intersection de la sphère avec une pyramide ayant son sommet à l'antipode du centre de la carte.

Exemple IV : Calculons une carte authalique représentant la portion de sphère délimitée par quatre orthodromies. La demi-diagonale est représentée par la longueur $2 \sin \frac{60}{2} = 1$. Les coins de la carte sont donc distants de 1.414. L'apothème est représenté par une longueur de $2 \sin \frac{1}{2}$ 50°75 = 0.855, tandis que le cadre est distant du centre de 0.707. Ainsi l'orthodromie est représentée par une courbe dont la flèche est

$$0.855 - 0.707 = 0.148,$$

tandis que la corde est de 1.414.

CHAPITRE III

Cartes de régions peu étendues.

§ **187.** — Considérons une carte de Postel représentant une calotte sphérique d'amplitude z^0 ; la formule donne

$$\Delta_m = \frac{z}{\sin z}.$$

Calculons z de manière que

$$\Delta_m = 1 + \frac{1}{1000}.$$

Il vient

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{1001}{1000}, \qquad \text{d'où} \qquad z = 4^\circ 27',$$

alors

$$\Delta_m = \Delta_s = 1.001, \qquad \omega = 3'', \qquad 2\omega = 6''.$$

L'échelle cartographique dessinée en marge de la carte sera l'échelle au centre multipliée par $\sqrt{1.001}$ ou 1.0005.

Alors l'erreur commise dans une mesure faite au centre = erreur commise dans une mesure faite à la périphérie = 1.0005, soit donc une erreur de 0.1 de millimètre sur une longueur de 20 centimètres.

Nous pensons qu'un bon dessinateur ne peut travailler avec une précision plus grande que $\frac{1}{2000}$; nous dirons donc que la projection de Postel est *pratiquement* PARFAITE pour la carte des régions dont la plus *grande* dimension ne dépasse pas $2 \times 4^\circ 27' = 8^\circ 54'$; et qu'il n'y a pas lieu, pour des régions aussi petites, de chercher un meilleur mode de représentation.

EXEMPLES : Espagne, Angleterre, Autriche, France.

§ **188.** — Faisons un calcul analogue pour la projection plate carrée en posant

$$\Delta_m = 1.001, \qquad \text{d'où} \qquad \cos\varphi = 0.999, \qquad \varphi = 2^\circ 33'5.$$

Donc la projection plate carrée est pratiquement parfaite pour les régions dont la plus *petite* dimension ne dépasse pas 5°7′.

§ **189.** — Nous pensons que pour résoudre la plupart des questions de géographie, on ne demande pas une précision plus grande que $\frac{1}{200}$.

Si nous faisons les calculs pour une projection de Postel donnant

$$\Delta_m = 1 + \frac{1}{100} = 1.01,$$

nous trouvons

$$z = 14°, \qquad \omega = 17'.$$

La projection de Breusing donnerait un résultat peu différent :

$$z = 13°20', \qquad \omega = 11'5.$$

La projection plate carrée donne

$$\varphi = 8°, \qquad \omega = 33'4.$$

Nous dirons donc que la projection de Postel est pratiquement SUFFISANTE pour des cartes représentant une région dont la plus *grande* dimension ne dépasse pas 28°.

[EXEMPLES : Russie, Inde anglaise, République Argentine, Australie, Mexique.]

Et que la projection plate carrée est pratiquement suffisante pour des cartes représentant des régions dont la plus *petite* dimension ne dépasse pas 16°.

Ainsi l'objet de nos études ultérieures doit porter seulement sur les cartes de régions étendues.

CHAPITRE IV

Cartes d'une région étendue.

D'après la remarque qui précède, le problème des projections n'est intéressant que pour les cartes représentant une région étendue. C'est au cartographe à formuler les conditions auxquelles

la carte doit satisfaire, et c'est au géomètre à calculer un système qui remplisse ces conditions.

Si l'on n'a en vue que les altérations locales, on est amené à considérer les cartes sans altération de superficie et les cartes sans altération d'angle.

§ 190. — Certains auteurs donnent à la deuxième catégorie le nom de conforme ou orthomorphe; cette dénomination est erronée; en effet, il est bien vrai qu'une figure infiniment petite de la sphère est représentée sur la carte par une figure semblable; mais, pour une figure de dimensions finies, la similitude n'existe plus. En voici deux exemples : Sur la carte de Mercator, un pentagone régulier (face du dodécaèdre) est représenté par une figure qui a deux côtés parallèles; sur une carte stéréographique, un petit cercle est représenté par la figure 47.

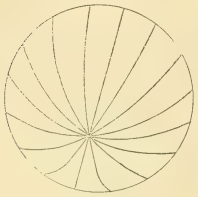


Fig. 47.

Ainsi, l'orthomorphie est une propriété locale, mais non intégrale, et le terme : authogonale, serait plus exact. L'authalisme, au contraire, est une propriété locale et intégrale.

Si donc le géomètre fait une classification en trois groupes : I, authaliques; II, orthomorphes; III, autres, le cartographe ne doit considérer que deux catégories : I, les cartes authaliques, II, les cartes non authaliques.

C'est en vertu de cette remarque que nos études ont surtout porté sur les cartes authaliques.

Ci-dessous une série d'autres remarques que nous n'avons pu coordonner.

§ 191. — 1. Pour faire choix d'une projection convenant à la carte de France, on inscrit cette région dans un contour, et l'on cherche une projection qui a ce contour pour équidéformée. Mais on devrait s'abstenir de représenter aucune province en dehors de ce contour; pourtant nous voyons, dans la plupart des

atlas, les cartes s'étendre jusqu'à un cadre rectangulaire; sur la carte de France figure la Belgique, la Suisse, etc.; et si, sur une telle carte, nous mesurons, par exemple, la distance Liége-Berne, l'erreur commise sera plus grande que l'erreur maximum prévue par le géomètre.

§ 192. — 2. Outre les indications que nous demandons à la carte, il en est que nous prenons inconsciemment et que la carte n'est pas destinée à nous fournir; ces indications sont alors erronées.

Exemple I : En consultant la carte de Mercator, établie seulement pour mesurer des angles et tracer des loxodromies, nous gardons l'impression que le Groenland est beaucoup plus étendu que l'Hindoustan; ces deux péninsules ont pourtant la même superficie.

Exemple II : Toute carte est bonne pour y indiquer l'emplacement des gites aurifères, mais la projection de Mercator donnera toujours l'impression que les gîtes de la Sibérie sont très éloignés de l'océan Pacifique.

Exemple III : Nous sommes accoutumés, sur les cartes à petite échelle, à voir les lignes Est-Ouest parallèles au bord inférieur du cadre. Par habitude, en consultant la carte d'Asie, en projection

Fig. 48.

de Boone (fig. 48), nous avons l'impression que Tokio est à la même latitude que Semipalatinsk; pourtant les latitudes diffèrent de 15°.

Exemple IV : Nous traçons les orthodromies en ligne droite; c'est ainsi que sur les cartes où les parallèles sont rectilignes, nous traçons la route de Manille à Panama suivant le parallèle de 10° latitude nord. Cependant l'orthodromie qui joint ces deux points s'approche à 27° du pôle.

§ 193. — 3. Certains auteurs semblent considérer comme un avantage la propriété des cartes équidistantes d'avoir les méridiens à une échelle linéaire unique; une telle carte permet de mesurer la distance entre deux points de même longitude; mais ces distances seulement, les autres distances sont diversement altérées.

§ 194. — 4. Même remarque pour les cartes où tous les parallèles sont à la même échelle; mais, dans ce cas-ci, on ne peut même pas mesurer la distance entre deux points de même latitude; car le cercle de latitude n'est pas orthodromique.

§ 195. — 5. Certains auteurs font état de ce que tel ou tel système donne un réseau de parallèles et méridiens qu'on établit par des calculs simples; cela n'est pas à considérer; car les calculs ne sont faits qu'une seule fois; les cartes sont mises à jour périodiquement, mais le réseau des parallèles et méridiens subsiste.

§ 196. — 6. Dans le même ordre d'idées, il ne faut pas considérer la propriété que le réseau est formé d'arcs de cercle qu'on peut aisément tracer au compas; en effet, dans la plupart des cas, les rayons sont tellement étendus que le dessinateur doit se servir d'un compas à verge, qui est peu précis, ou mieux, tracer la courbe par points; dans ce cas, il est aussi facile de tracer des courbes à équation compliquée.

§ 197. — 7. Considérons une carte de Mercator représentant toute la surface terrestre (fig. 49). L'océan Pacifique est coupé par le cadre en deux parties; cela présente parfois un

inconvénient; pour y remédier, il suffit de prolonger la carte vers l'Est (ou vers l'Ouest) et représenter une seconde fois les

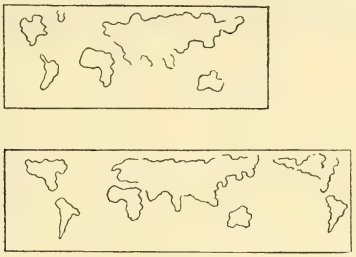


Fig. 49.

Amériques. Et, par ce procédé, on n'a pas augmenté les altérations locales.

Cette propriété de pouvoir être prolongée sans augmenter les altérations appartient à toutes les cartes cylindriques, coniques et tronconiques.

Ces remarques faites, nous pouvons considérer quelques cas particuliers où le choix de la carte se détermine aisément.

§ **198.** — 8. Carte indiquant la déclinaison magnétique.

Pour mesurer aisément les angles de déclinaison, il faut que les méridiens soient rectilignes et que la carte soit orthomorphe. La carte sera plus expressive si les méridiens sont parallèles.

Nous choisissons donc la carte de Mercator, à laquelle nous ajoutons deux petites cartes des régions polaires, en projection stéréographique.

§ **199.** — 9. Carte indiquant les isothermes.

Tous les systèmes conviennent; mais si l'on veut montrer que les isothermes sont en discordance avec les cercles de latitude, il convient que les parallèles soient rectilignes et parallèles.

D'après Supan, on peut partager la terre en quatre fuseaux au point de vue des isothermes : Asie, Pacifique, Amérique,

Atlantique. Il convient donc que les méridiens soient aussi parallèles. On choisira donc une projection quelconque de la première classe (cylindrique).

Si l'on veut que les isothermes soient à peu près équidistants, on prendra

$$y = -0.7\varphi + 1.52\varphi^2.$$

§ 200. — 10. Carte indiquant les régions de culture du riz.

La carte s'étend beaucoup plus en longitude qu'en latitude; on choisira donc pour axe de symétrie l'équteur géographique. Il est important de pouvoir mesurer la superficie cultivée; il convient que la projection soit authalique. Enfin, la latitude maximum où se cultive le riz varie avec les régions; pour rendre ce fait sensible, on choisira une projection où les cercles de latitude sont des droites parallèles.

Le choix se portera donc sur la projection de Flamsteed modifiée.

Les continents sont seuls intéressés; donc on pourra ménager, entre les continents, quelques déchirures afin de diminuer les altérations.

§ 201. — 11. Carte côtière de l'Amérique du Sud, indiquant les parcours des bateaux de cabotage.

Pour cette carte, il importe seulement que les trajets le long des côtes soient tous représentés à la même échelle.

Sur le globe, traçons un triangle ABC, formé de trois orthodromies, qui épousent le mieux possible la ligne des côtes; mesurons les trois côtés et faisons une carte où nous dessinons un triangle plan *abc* ayant les côtés proportionnels à ceux de ABC.

Les régions avoisinant les côtes seront représentées par trois projections cylindriques ayant pour axe, respectivement, *ab*, *bc*, *ca*.

Pour la simplicité, choisissons une projection équidistante $y = k\varphi$. Pour déterminer k, nous imposons la condition que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC sera représenté dans les trois projections par un même point m.

A cet effet, mesurons sur le globe le rayon r^{o} du cercle inscrit, et mesurons sur la carte le rayon R^{mm} du cercle inscrit à *abc*.

Le coefficient k sera $\frac{R^{mm}}{r^{o}}$.

Les trois projections cylindriques seront raccordées aux trois sommets par une carte azimutale $y = kz$.

Le long de *ma*, *mb*, *mc*, il y a entre les cartes voisines des discordances que le dessinateur fait disparaître lors de la mise au net.

§ 202. — 12. Nous nous proposons de construire une mappemonde où sont représentées les principales lignes de navigation.

Nous envisagerons successivement les considérations suivantes :

A. Si l'on dresse des cartes partielles donnant les parcours transocéaniques à une échelle unique, et si l'on essaye de les juxtaposer, on constate qu'il est difficile de former une carte cylindrique et que l'on est amené à former deux cartes tronconiques représentant chacune un hémisphère.

B. Les principales lignes de trafic sont comprises entre les parallèles de latitude 60°. Une carte tronconique à altération locale minimum, représentant la zone comprise entre l'équateur et la latitude 60°, a pour équation : $\theta = \frac{1}{2}\lambda$.

C. Il y a un avantage pratique à prendre $\theta = \frac{1}{2}\lambda$; dans ce cas, un hémisphère est représenté par un demi-cercle et l'on pourra, dans une carte circulaire, représenter deux fois tous les points d'un hémisphère; cette disposition est utile quand on veut confronter deux itinéraires joignant deux points dont les longitudes diffèrent de 180° environ. Ainsi, il est avantageux de pouvoir tracer sur une même carte, sans discontinuité, les deux itinéraires de la Patagonie aux Indes hollandaises : l'un par le Pacifique, l'autre par l'Atlantique et l'océan Indien.

Nous sommes donc amenés à choisir $\theta = \frac{1}{2}\lambda$.

Dans un but de simplification, nous décidons de choisir une carte de de l'Isles : $\rho = k + z$.

Il reste à calculer le paramètre k.

D. Les trajets si importants : Panama-Gibraltar-Suez-Australie et Australie-Nouvelle-Zélande-Panama, suivent à peu près l'orthodromie inclinée de 35° sur l'équateur. Calculons k, pour que cette orthodromie soit représentée par une droite.

Cette condition conduit à

$$\rho_{35} = \rho_{90} \times \cos 45^\circ, \qquad \text{d'où} \qquad k = 0.515.$$

E. Calculons k de manière que l'écart orthodromique pour un distance de 90° soit la même aux bords supérieur et inférieur de la carte.

Au bord inférieur, l'orthodromie est l'équateur; les deux extrémités sont distantes angulairement de 45°. L'écart est

$$[1 - \cos \tfrac{1}{2}\, 45^\circ] \times \rho_{90}.$$

Au bord supérieur, l'orthodromie aboutit à deux points situés sur le parallèle de latitude 38° et distants angulairement de 63°5. L'écart est

$$\rho_{52} \times \cos \tfrac{1}{2}\, 63^\circ - \rho_{30}.$$

L'égalité des écarts conduit à

$$(k + 1.57)\ 0.076 = 0.850(k + 0.907) - (k + 0.524),$$

d'où

$$k = 0.561.$$

F. Déterminons k de manière que l'altération locale soit la même aux bords supérieur et inférieur de la carte.

L'équation du § 77

$$\sin z = n^2 \frac{k + z}{\cos z_2}$$

doit être satisfaite pour $z = 90$ et $z = 30$.

Il vient donc

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{n^2}{\cos z_3}\left(k + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0.5 = \dfrac{n^2}{\cos z_3}\left(k + \dfrac{\pi}{6}\right), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{\pi}{6} = 0.524.$$

D'après les calculs des paragraphes *D*, *E*, *F*, nous adoptons la valeur $k = 0.524$.

L'équation de la carte est donc

$$\theta = \tfrac{1}{3}\lambda. \qquad \rho = 0.524 + z.$$

Propriétés :

Altérations locales. — L'échelle m_p se calcule par

$$m_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{0.524 + z}{\sin z}.$$

A l'équateur et à la latitude 60°,

$$m_p = 1.048 = \frac{\pi}{3}.$$

Elle est minimum à la latitude z_3 déterminée par

$$\cos z_3 = 0.524.$$

Cette latitude est 31°6. L'échelle est

$$m_p = \frac{0.5}{0.524} = \frac{3}{\pi} = 0.955.$$

Il vient donc

$$\Delta_s = \Delta_m = \frac{1.048}{0.955} = 1.095 = \frac{\pi^2}{9},$$

$\operatorname{tg}^2 T_m = 1.048$, d'où $4 \operatorname{tg}^2 \omega = -2 + 1.048 + 0.955 = 0.0030$,

d'où

$$\omega = 1°5.$$

Altérations intégrales. — La planche K représente la carte d'un hémisphère, où TPQNT représente 360° d'équateur; les points T et N sont antipodes.

Sur la carte figurent les orthodromies A, B, C, D, E, F, H, qui réunissent ces deux antipodes.

De ces lignes, la plus courbée est l'orthodromie F; l'écart est de 9°5 pour une distance de 90°.

Les points P et Q, distants de 90°, donnent un écart de 9°1.

Altérations de distance. — I. Distances ne coupant pas l'équateur.

Nous bornerons le calcul aux distances de 90°. Les indicateurs sont les orthodromies A, B, C, ..., qui ont pour centre les points C′, D′, F′, ...; de plus, l'orthodromie MABCD... a pour centre N.

Mesurons sur la carte les rayons de ces indicateurs : le plus court est F′S; le plus long est MN.

Le rapport de ces deux rayons mesurés sur le dessin est de $[\Delta_m] = 1.1155$.

Ces valeurs de MN et F′S peuvent se déterminer par le calcul.

MN occupe sur la sphère un angle de 90° et sur la carte un angle de 45°; donc

$$\mathrm{MN} = 2 \times \rho_{90} \times \sin \tfrac{1}{2}\, 45^\circ = 91^\circ 75.$$

F′S peut être considéré comme la distance de deux points à la latitude 30° et distants de 90°. Ils sont séparés en longitude par un angle $2a$, déterminé par

$$\sin a = \frac{\sin 45}{\sin 60} = 0.816. \qquad a = 54^\circ 40'.$$

Donc sur la carte F′S occupe

$$\tfrac{1}{2}\, 54^\circ 40' = 27^\circ 20' \quad \text{et} \quad \mathrm{F'S} = 2 \times \rho_{60} \times \sin 27^\circ 20' = 82^\circ 25',$$

d'où

$$\Delta_m = \frac{91.75}{82.25} = 1.1155.$$

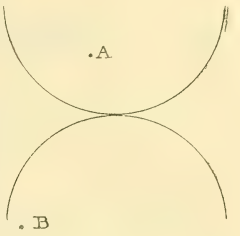
L'échelle à placer en marge de la carte sera telle que 90° sont représentés par

$$82.25 \times \sqrt{1.1155} = 86^\circ 75$$

mesurés sur le méridien de la carte; si l'on ne tenait compte que de l'altération locale, l'échelle serait celle des méridiens, soit une échelle $\frac{90}{86.75} = 1.04$ fois plus grande.

II. Distance coupant l'équateur.

Soit à mesurer la plus courte distance entre deux points A et B situés de part et d'autre de l'équateur (fig. 50); le seul moyen pratique consiste à faire rouler les cartes l'une sur l'autre jusqu'à ce que les points A et B soient alignés avec le point de contact C.



Si la variation d'échelle est maximum pour une telle distance, ce maximum aura lieu pour AB = CB. Il suffit donc de tracer un cercle *yy* (planche *K*) ayant pour rayon 45°. On vérifie qu'aucun de ces vecteurs ne donne une altération plus grande que 1.10.

Remarque. — Le point C n'est pas le point où l'orthodromie AB coupe l'équateur; en effet, sur la sphère, les longitudes λ_a, λ_b sont dans le rapport

$$\frac{\sin \lambda_a}{\sin \lambda_b} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_a}{\operatorname{tg} \varphi_b},$$

tandis que sur la carte on a

$$\frac{\sin \lambda_a}{\sin \lambda_b} = \frac{\frac{\delta_a}{\rho_a}}{\frac{\delta_b}{\rho_b}}.$$

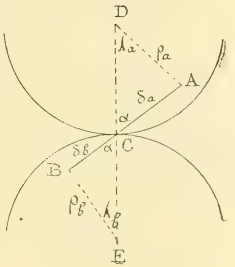


Fig. 50.

Les vecteurs ρ_a. ρ_b sont dans le rapport

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\sin(\alpha + \lambda_b)}{\sin(\alpha + \lambda_a)}.$$

Nous avons traité cette question dans tous ses détails pour montrer la manière d'utiliser les théories développées dans les chapitres précédents.

CINQUIÈME PARTIE

CARTES FRAGMENTÉES

CHAPITRE PREMIER

Cartes étoilées.

§ 203. — La construction des cartes étoilées est basée sur les considérations suivantes : Dans les cartes azimutales, l'altération augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre; si l'on veut, en une seule carte, représenter toute la surface du globe, il y a avantage à représenter par une carte continue une portion seulement du globe, par exemple un hémisphère, et de juxtaposer à cet hémisphère six triangles de 60° de largeur, représentant les six demi-fuseaux que comporte l'autre hémisphère.

Ces cartes sont dénommées étoilées ou floriformes (anthomorphe, *blättformische*). Parfois, au lieu de six triangles, on en construit seulement cinq de 72° de largeur.

Généralement, la carte centrale est une carte équidistante; mais les triangles qui forment les pétales de la fleur sont construits d'après un système arbitraire; et les propriétés de ces triangles ne sont pas analogues aux propriétés de la carte centrale.

Remarquons que si la carte centrale est authalique (ou orthomorphe), l'authalisme (ou l'orthomorphie) ne se continue pas dans les six triangles juxtaposés.

L'emploi de ces cartes ne s'est pas étendu.

Nous pensons qu'il y a lieu d'appliquer cette idée d'une manière plus judicieuse.

Imposons-nous, par exemple, que la carte sera, dans toute son étendue, une carte authalique, et que la déformation ne dépasse pas $\omega = 19°30'$.

Exemple I : Soit à dresser une carte où les cercles de latitude sont représentés par des droites équidistantes; nous nous baserons sur la carte de Samson-Flamsteed (fig. 51).

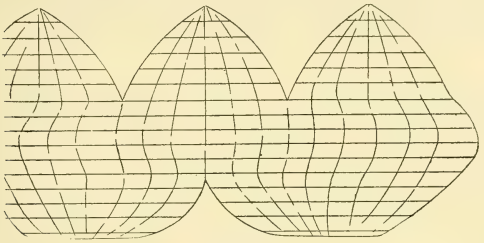


Fig. 51.

L'équidéformée $\omega = 19°30'$ limite une région égale à $\frac{56}{100}$ de la sphère; elle s'étend sur 360° de longitude jusqu'à la latitude φ_1 déterminée par $2 \operatorname{tg} \omega = 180° \times \sin \varphi_1$, d'où $\varphi_1 = 26°$.

Soit donc dressée une carte représentant une zone à cheval sur l'équateur et s'étendant au Nord et au Sud jusqu'à la latitude 26°. Juxtaposons au Nord de cette carte trois cartes de 120° de largeur; la déformation ne dépasse pas $\omega = 19°30'$. Juxtaposons au Sud deux cartes de 180° de largeur; nous pouvons nous étendre jusqu'à une latitude φ_2 déterminée par

$$2 \operatorname{tg} \omega = 90° \times \sin \varphi_2, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_2 = 64°.$$

Nous avons ainsi une carte renfermant toutes les régions continentales; il y manque une zone polaire australe de

$$90° - 64° = 26°, \quad \text{soit } \frac{1}{20} \text{ de la sphère.}$$

Exemple II : Soit à dresser une carte où les parallèles sont des cercles concentriques équidistants; nous nous baserons sur la carte de Werner. La déformation est donnée par

$$2 \operatorname{tg} \omega = \lambda \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right].$$

La carte s'étend sans discontinuité jusqu'à la colatitude $z_1 = 49°$; cette portion représente les $\frac{26}{100}$ de la sphère. A cette carte juxtaposons trois pointes de 120° de largeur; nous nous étendons jusqu'à la colatitude 98° (8° au Sud de l'équateur). Terminons par six pointes de 60° de largeur, s'étendant jusqu'au pôle austral (planche *R*).

Exemple III : On pourrait imaginer une combinaison intermédiaire ayant pour base la projection de Boone. Nous disposons du paramètre k arbitraire; soit, par exemple, $k = 0.262$ (planche *S*). La carte s'étend, sans discontinuité, depuis la latitude 20° jusqu'à la latitude 60°. Au Nord de cette carte, nous disposons deux pointes de largeur 180° correspondant aux deux continents : Amérique et Eurasie; au Sud, nous juxtaposons quatre pointes larges de 90° correspondant aux quatre régions : Sud-Amérique, Afrique, Australie et Polynésie. De cette manière, aucun des continents ne présente de déchirure.

Exemple IV : Nous pensons qu'il est préférable de s'affranchir de cette condition de symétrie; c'est ainsi que nous avons dressé la carte figurant à la planche *L*, en prenant pour base la carte de Werner; pour chaque zone, la partie continentale est au milieu du pétale; de cette manière, la déformation maximum est aussi petite que possible.

CHAPITRE II

Cartes en plusieurs feuilles.

§ **204.** — Soit à dresser la carte d'une région étendue, l'Asie par exemple, à une échelle tellement petite que la carte s'étende sur plusieurs mètres. Il est impossible d'imprimer de si grandes surfaces et il faudra faire la carte en plusieurs feuilles.

Dans ce cas, la plupart des auteurs dessinent les feuilles comme faisant partie d'une grande carte dressée d'après un système unique de projection; par exemple les cartes de l'atlas de Stieler, la carte de Belgique de l'Institut cartographique.

Nous ne partageons pas cette manière de voir; car par ce

procédé, l'altération d'angle augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre de la carte, et les feuilles de la périphérie donnent une représentation très déformée.

L'échelle linéaire aussi est altérée; mais cet inconvénient disparaîtra si l'on a soin de placer en marge de chaque feuille, non pas l'échelle moyenne de la carte, mais l'échelle moyenne de la feuille.

Nous pensons qu'il est préférable de dessiner chaque feuille comme une carte isolée; ainsi l'altération maximum sera l'altération à la bordure de la feuille et non à la bordure de la carte.

Donc il faudra tracer sur le globe un réseau de lignes délimitant les portions à représenter. Soient, par exemple, les méridiens de 10° en 10° et les parallèles de 10° en 10°; chaque trapèze sera représenté en une feuille, comme si ce trapèze était isolé.

Raccord des feuilles. — Les méridiens et les parallèles qui forment le cadre des feuilles ne sont pas rectilignes; on ne pourra donc pas juxtaposer exactement deux feuilles voisines.

Nous avons vu au § 186 que pour une carte authalique dont la diagonale est de 120°, l'orthodromie est une courbe dont la flèche vaut 10 % de la corde; un calcul analogue donne pour une carte dont la diagonale est 60° une flèche égale à 5 % de la corde; enfin, pour une diagonale de 40°, la flèche est de 2 %. Une telle carte a une superficie égale au $^1/_{50}$ du globe.

Si l'on veut un raccord parfait, il faudra théoriquement pousser la subdivision jusqu'à l'infini; mais en pratique, il suffira de s'arrêter quand les discordances sont de la même grandeur que les erreurs inévitables provenant : 1° de l'inexactitude du dessinateur; 2° des défauts de la machine à imprimer; 3° de l'inégal retrait du papier en ses diverses parties.

CHAPITRE III

Cartes polyédriques.

§ 205. — Pour partager la sphère en plusieurs fragments, il paraît plus simple d'employer, au lieu des parallèles et méridiens, les orthodromies qui délimitent les faces des polyèdres réguliers.

Douze cartes. — Soient, par exemple, les douze pentagones sphériques correspondant aux faces du dodécaèdre inscrit.

Représentons chaque feuille par un pentagone régulier. Sur la sphère, l'angle du pentagone vaut 120°; sur la carte, l'angle vaut 108°.

La projection gnomonique est telle que le contour du pentagone sphérique est représenté par des droites; ainsi, deux cartes voisines pourront être toujours juxtaposées.

Du centre aux sommets du pentagone, la distance est de 37°5. Au sommet du pentagone, les altérations sont

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{T} = 1.26, \qquad \Delta_m = 1.59, \qquad \Delta_s = 2.$$

Le cercle inscrit a pour rayon 32°; il comprend les $^9/_{10}$ de la superficie du pentagone; à la bordure de ce cercle, les altérations sont

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{T} = 1.1754, \qquad \Delta_m = 1.58, \qquad \Delta_s = 1.62.$$

Vingt cartes. — Considérons les vingt triangles sphériques correspondant aux faces de l'icosaèdre.

Sur la carte, l'angle est de 60°; sur la sphère, il est de 72°. Aux sommets du triangle, l'altération est la même que pour le pentagone, car le cercle circonscrit a le même rayon :

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{T} = 1.26, \qquad \Delta_m = 1.59, \qquad \Delta_s = 2.$$

Le cercle inscrit a pour rayon 20°40′. Il comprend les $^{65}/_{100}$ de la surface du triangle. A la bordure de ce cercle,

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{T} = 1.07, \qquad \Delta_m = 1.14, \qquad \Delta_s = 1.225.$$

Huit cartes. — Considérons les huit triangles sphériques correspondant aux huit faces de l'octaèdre.

L'angle au sommet est de 90°; il est représenté sur la carte par un angle de 60°. Aux sommets du triangle, les altérations sont

$$\text{tg}^2\,T = 1.73, \qquad \Delta_m = 3, \qquad \Delta_s = 5.20.$$

Le cercle inscrit comprend les 0.723 du triangle. A la bordure du cercle, les altérations sont

$$\text{tg}^2\,T = 1.225, \qquad \Delta_m = 1.5, \qquad \Delta_s = 1.88.$$

Six cartes.— Correspondant aux six faces du cube. Angle = 120°.

Aux sommets du carré, l'altération est la même que pour l'octaèdre.

Le cercle inscrit a pour superficie les 0.879 du carré; à la bordure de ce cercle, les altérations sont

$$\text{tg}^2\,T = 1.414, \qquad \Delta_m = 2, \qquad \Delta_s = 2.83.$$

Quatre cartes. — Correspondant aux faces du tétraèdre.

L'angle de 120° est représenté sur la carte par un angle de 60°. Le rayon du cercle circonscrit est de 70°5. Les altérations aux sommets sont

$$\text{tg}^2\,T = 3, \qquad \Delta_m = 9, \qquad \Delta_s = 27.$$

Le cercle inscrit a le même rayon que le cercle circonscrit à la face du cube ou à celle de l'octaèdre. Ce cercle vaut les 0.8434 du triangle. Les altérations, à la bordure du cercle, sont donc

$$\text{tg}^2\,T = 1.73, \qquad \Delta_m = 3, \qquad \Delta_s = 5.20.$$

Cette étude est résumée au tableau C.

CHAPITRE IV

Mappemonde en quatorze cartes.

§ 206. — Nous nous proposons de dresser la carte de toute la sphère en quatorze fragments à contour rectiligne. La zone comprise entre l'équateur et le parallèle de latitude 60° sera

partagée en six trapèzes. La calotte polaire de 30° de rayon sera représentée par une carte hexagonale.

Nous nous imposons en plus : que la carte soit authalique, que les méridiens soient rectilignes et que les cercles de latitude soient des droites parallèles, enfin que la déformation soit la même aux bords supérieur et inférieur de chaque trapèze.

Cette carte figure à la planche *P*.

§ **207**. *Altérations intégrales.* — Donnons le mode d'emploi de la carte pour tracer le plus court chemin entre deux points donnés et mesurer la distance qui les sépare : il faut juxtaposer les trapèzes intéressés de manière que la droite qui joint les points donnés ne traverse aucun intervalle vide.

Exemple : Planche *M* : les fragments sont disposés pour mesurer la distance SD′ ; pour mesurer la distance C″F, cette disposition ne convient pas ; il faut placer les fragments tels qu'ils sont à la planche *Q*.

La juxtaposition étant faite, joindre les points par une droite et la mesurer à l'échelle.

Écart d'orthodromie. — Nous avons tracé les orthodromies A, B, C..., *a*, *b*, *c*... ; la plus forte courbure est en PQ (planche *M*) ; l'écart est de 13°.

Altérations de distance. — Les orthodromies sont des indicateurs de rayon 90° ; chaque indicateur a deux centres désignés par A′, B′, C′, ..., A″, B″, C″, ..., *a*′, *b*′, *c*′, ..., *a*″, *b*″, *c*″, ...

Le plus grand vecteur est le vecteur *mr* (planche *N*) ; le plus court est le vecteur F″S (planche *M*). Il vient donc $[\Delta_m] = 1.14$.

Ainsi les altérations intégrales sont plus grandes que pour la carte étudiée au § 202 ; mais, par compensation, cette carte est authalique, et elle comprend toute la surface du globe.

§ **208**. *Calcul des équations de la carte.*

1° Calcul du côté de l'hexagone.

Soit *a* ce côté ; on a : hexagone $= 6 \times \frac{1}{2} a^2 \cos 30°$.

Calotte polaire $= 2\pi(1 - \sin 60^\circ)$, d'où

$$a^2 = \frac{2\pi}{5}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right] = 0.524, \qquad a = 0.57.$$

2° Carte en trapèze.

Prolongeons jusqu'à leur rencontre les côtés du trapèze, et soit 2α l'angle au sommet; soit

$$y = \mathrm{H} - m, \qquad x = m \operatorname{tg}\alpha \frac{\lambda}{30^\circ} = \frac{6\lambda}{\pi} m \operatorname{tg}\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$q' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial m}{\partial \varphi}, \qquad p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{6}{\pi} m \operatorname{tg}\alpha.$$

La condition de l'authalisme est $\cos\varphi = pq'$, d'où

$$\cos\varphi = -\frac{dm}{d\varphi} \cdot \frac{6}{\pi} \cdot m \operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en intégrant

$$m^2 = \frac{\pi}{3 \operatorname{tg}\alpha}[k - \sin\varphi]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Il reste à calculer les constantes k et α.

Nous nous sommes imposé la même déformation à l'équateur et à la latitude 60°; donc

$$\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0 = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{60}.$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$\cos^2\varphi = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2 \times (k - \sin\varphi) \times \text{constante}.$$

A l'équateur

$$1 = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0^2 \times k \times \text{constante}.$$

A la latitude 60°

$$(0.5)^2 = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{60}^2 \times [k - 0.866] \times \text{constante}.$$

Il vient donc

$$\frac{k}{4} = k - 0.866, \qquad k = \frac{4}{3} \times 0.866 = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155.$$

D'autre part, à la latitude 60°, il faut $m \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} a$, afin que le trapèze se raccorde à l'hexagone.

L'équation (2) donne

$$\frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi}{3 \operatorname{tg} \alpha} [k - 0.866],$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{4\pi} a^2 = 2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} 15°.$$

Ainsi les deux côtés du trapèze font un angle de 30°, tandis que sur la sphère, l'angle est de 60°.

L'angle aigu du trapèze vaut 75°; ainsi, quand on juxtapose quatre trapèzes, le vide est de $360° - 4 \times 75° = 60°$.

Quand on juxtapose l'hexagone avec deux trapèzes, le vide est de $360° - 120 - 2 \times 105 = 30°$.

L'équation de la projection est donc

$$m^2 = \frac{\pi}{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \sin \varphi\right].$$

On constate que la grande base du trapèze est double de la petite base.

§ **209.** *Altérations locales.* — A l'équateur

$$m^2 = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) = 4.51.$$

L'équation (1) donne

$$1 = \frac{dm}{d\varphi} \times 0.512 \times \sqrt{4.51}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0.92.$$

La déformation est la même à la latitude 60°.

Le maximum de $\frac{dm}{d\varphi}$ se calcule en égalant à zéro $\frac{d^2m}{d\varphi^2}$.

On obtient $\varphi = 35°5$; en ce point $\frac{dm}{d\varphi} = 1.06$.

La déformation se calcule par

$$4\,\mathrm{tg}^2\,\omega = \left(\frac{p}{\cos\varphi} - q'\right)^2 + q^2 \quad \text{où} \quad p = \frac{6}{\pi}\cdot m\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$q = \frac{6\lambda}{\pi}\cdot \mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{dm}{d\varphi}, \qquad q' = -\frac{\partial m}{\partial\varphi},$$

donc

$$4\,\mathrm{tg}^2\,\omega = \left(\frac{1}{q'} - q'\right)^2 + q'^2 \times \left(\frac{6\lambda}{\pi}\cdot \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2.$$

La déformation est nulle en deux points de la médiane : à la latitude 12°5 et à la latitude 53°.

Ci-dessous la valeur de ω pour quelques points :

Sur les côtés du trapèze ($\lambda = 30°$) :

Équateur et latitude. .	60°	$\omega = 8°30'$
A la latitude	35°5	$\omega = 8°40'$
Aux latitudes . .	12.5 et 53°	$\omega = 7°40'$

Sur la médiane du trapèze :

Équateur et latitude. .	60°	$\omega = 4°40'$
Latitude	35°5	$\omega = 3°20'$

La variation de l'échelle locale s'exprime par $\Delta_m = \mathrm{tg}^2\,T_m$.

$$T_m = 45° + \frac{1}{2}\,8°40' = 49°20',$$

d'où

$$\Delta_m = 1.35.$$

La déformation maximum est la même que pour une carte azimutale représentant $^1/_4$ de la sphère.

§ **210.** *Calcul algébrique des altérations intégrales.*

1° Écart de la distance PQ.

Sur la carte, cet écart est de

$$\frac{3}{4} \times 2a \times \cos 75° = a \times 0.388.$$

Le sommet de PQ est distant du centre de la carte en trapèzes de $3.86a$. Donc la corde PQ est distante de ce centre de

$$3.86a - 0.59a = 3.47a.$$

La latitude du milieu de la corde se calcule par la formule

$$\frac{m_\varphi^2}{m_0^2} = \frac{k - \sin\varphi}{k} = 1 - \frac{\sin\varphi}{1.155}.$$

Il vient donc

$$\frac{\sin\varphi}{1.155} = 1 - \left(\frac{3.47}{3.86}\right)^2 = 0.19,$$

d'où

$$\varphi = 12°40'.$$

Calculons l'écart pour la distance P'Q' (planche *P*).

L'écart est de

$$\frac{3}{4} \times 1.93a \times \sin 15° = a \times 0.375.$$

Or a représente 30°; l'écart est donc $30° \times 0.375 = 11°25$.

Altérations de distance. — Le dessin nous montre qu'il faut chercher la plus longue distance sur l'équateur, en *mr* (planche *N*).

Soit $b = 2a$ la base du trapèze. Quand la distance est à cheval sur la médiane du trapèze, elle mesure

$$b + 2 \times \frac{b}{4} \sin 75° = b \times 1.483 = 1.69.$$

Quand elle est à cheval sur le côté du trapèze, elle mesure

$$2 \times \frac{3}{4} b \times \sin 75° = b \times 1.45.$$

La distance la plus courte est une distance dont les extrémités sont à la latitude 30° en F''S (planche *M*); ces deux bouts sont distants, en longitude, de $2 \times 34°40'$.

Le parallèle de 30° est au parallèle 0° dans la proportion

$$\frac{d^2}{b^2} = \frac{k - \sin 30°}{k} = 0.567;$$

donc il vaut

$$b \times \sqrt{0.567} = b \times 0.755.$$

Quand la distance est à cheval sur la médiane du trapèze, elle mesure

$$d + 2 \times d \times \frac{24°40'}{60°} \times \sin 75° = d \times 1.795 = b \times 1.35.$$

Si elle est à cheval sur le côté du trapèze, elle vaut

$$2 \times d \times \frac{54°40'}{60°} \times \sin 75° = d \times 1.76 = b \times 1.325 = 1.51.$$

Les distances à comparer sont donc

$$\frac{1.69}{1.51} = \frac{b \times 1.485}{b \times 1.325} = [\Delta_m] = 1.121.$$

L'échelle linéaire à placer en marge de la carte sera telle que 90° mesurent $1.51 \times \sqrt{1.121} = 1.60$.

Au contraire, l'échelle calculée d'après l'échelle de superficie donnerait

$$90° = \frac{\pi}{2} = 1.57.$$

Vérifions par le calcul que les distances mesurées à travers la région polaire ne donnent pas une altération plus grande que celles mesurées sur les trapèzes.

Si la distance traverse l'hexagone en diagonale, elle mesure $2\,[a + \frac{1}{4}$ supérieur de la hauteur du trapèze$] = 1.67$.

Si elle traverse l'hexagone suivant la médiane, elle mesure $2\,[a \cos 30° + \frac{1}{4}$ supérieur de la hauteur$] = 1.51$.

CHAPITRE V

Mappemonde en douze cartes pentagonales.

§ 211. — Proposons-nous de représenter toute la surface du globe en douze cartes authaliques identiques, représentant chacune la portion de sphère correspondant à une face du dodécaèdre régulier.

Imposons-nous que le pentagone sphérique soit représenté par un pentagone régulier à contour rectiligne ; ainsi les cartes seront juxtaposables.

Partageons les deux pentagones en dix parties égales par les rayons aboutissant aux sommets et par les apothèmes.

Chaque partie du pentagone sphérique est un triangle ayant pour angles 90°, 60°, 36°.

Les côtés se calculent par les formules

$$\cos b = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5}} \qquad b = 20^\circ 54' 18'' 59$$

$$\cos c = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} \qquad c = 31^\circ 43' 2'' 90$$

$$\cos a = \cos b \cos c = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{15}\sqrt{5}} \qquad a = 37^\circ 22' 38'' 51.$$

Remarquons que le périmètre vaut 90°.

Chaque partie du pentagone rectiligne est un triangle ayant pour angles 90°, 36°, 54°.

Les côtés se calculent par la formule

$$d^2 \times \operatorname{tg} 36^\circ = 12^\circ = \frac{\pi}{15}, \qquad d = 0.556906666$$

$$g = d \operatorname{tg} 36^\circ = 0.39008549$$

$$f = d : \cos 36^\circ = 0.6636532.$$

La planche *W* représente en BCDE la moitié d'un pentagone formée de cinq triangles ayant pour sommet commun A et pour base BC, CG, GD, DF, FE.

Nous y mesurerons certaines distances, respectivement sur la sphère et sur la carte :

	Carte.	Sphère.
EC	1.26234300	70°31'43''62
EG	0.97412623	50°44'8''22
BF	1.02125707	60°
BG	0.63117174	36°.

Le problème n'est pas encore complètement déterminé : on peut satisfaire d'une infinité de manières aux conditions imposées.

Toutefois nous pouvons dès à présent calculer les altérations intégrales de distance.

§ 212. *Altérations intégrales de distances.* — Traçons des indicateurs ayant pour rayon 90°. Les valeurs extrêmes des rayons vecteurs se trouveront en plaçant le centre de l'indicateur dans des positions particulières.

Nous le placerons successivement au centre du pentagone, à un sommet, au milieu d'un côté.

I. Centre de l'indicateur au centre du pentagone, en A (planche *U*). L'indicateur est BCD. Les vecteurs à mesurer sont

$$AB = 1.554, \qquad AC = 1.591.$$

II. Centre de l'indicateur au sommet du pentagone, en M (planche *V*). L'indicateur est PNQ. Les vecteurs à mesurer sont

$$MN = 1.556, \qquad MQ = 1.652.$$

III. Centre de l'indicateur au milieu d'un côté, en E (planche *U*). L'indicateur est FGKL. Les vecteurs à mesurer sont

$$EK = 1.652428, \qquad ER = 1.531885.$$

Des six vecteurs mesurés, il nous faut retenir les valeurs extrêmes EK et ER.

Pour calculer ER, considérons le triangle rectangle formé en prolongeant ME et FR. L'angle aigu vaut 18° ; l'hypothénuse vaut

$$\frac{MF}{\sin 18^\circ} = 5.547368,$$

d'où

$$\frac{EK}{ER} = \frac{5.547368}{5.547368 - 0.590067} = 1.0785 = (\Delta_m).$$

Sur l'échelle linéaire à placer en marge de la carte, la distance de 90° est représentée par $ER \times \sqrt{1.0785} = 1.59$.

Au contraire, l'échelle de superficie donnerait

$$90^\circ = \frac{1}{2}\pi = 1.57.$$

Le rapport de ces deux échelles est 1.012.

§ 213. — Il est une infinité de manières de représenter par une carte authalique le triangle sphérique 90°, 60°, 36°, en satisfaisant aux conditions imposées.

Nous étudierons les méthodes qui se prêtent le plus aisément au calcul et nous construirons sept cartes, pour lesquelles nous représentons par des droites :

I. Les orthodromies issues de l'angle 36°;
II. Id. id. 60°;
III. Id. id. 90°;
IV. Id. perpendiculaires au long côté de l'angle droit;
V. Id. id. au petit côté de l'angle droit;
VI. Les arcs de petit cercle parallèles au long côté de l'angle droit;
VII. Id. id. au petit côté de l'angle droit.

§ 214. *Carte I.* — Représenter par des droites les orthodromies issues de l'angle 36°.

Prenons pour coordonnées sphériques z et λ, et pour coordonnées cartographiques ρ et θ.

Plaçons le pôle au sommet de l'angle 36° et prenons pour axe le long côté de l'angle droit.

Pour les coordonnées z, λ, ρ, θ, la condition de l'authalisme s'exprime par (§ 100)

$$\sin z = \rho \left[\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial\lambda} \right].$$

Les orthodromies issues de l'angle droit sont rectilignes, donc θ ne dépend que de λ et $\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$.

La formule ci-dessus devient

$$\sin z = \rho \frac{\partial\rho}{\partial z} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda}.$$

L'intégration de cette équation donne

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \text{constante} - 2\cos z.$$

La constante se calcule par la condition que ρ s'annule avec z. Il vient

$$\frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = 1 - \cos z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Il reste à calculer l'équation qui lie λ et θ; elle s'obtiendra en exprimant que le petit côté du triangle est représenté par une droite.

Sur la sphère, ce côté a pour équation

$$\operatorname{tg} z \cos \lambda = \operatorname{tg} 31°43' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et, sur la carte, il a pour équation

$$\rho \cos \theta = 0.54 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

autrement dit, quand z a une valeur particulière t déterminée par l'équation (2), ρ prend les valeurs données par (3). Ainsi λ est fonction de la variable auxiliaire t.

Introduisons dans (1) les valeurs de ρ et z déterminées par (2) et (3); il vient

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{(0.54)^2}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} &= 1 - \cos t = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \\ &= 1 - \frac{\cos \lambda}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \operatorname{tg}^2 31°43'}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

La quantité sous le radical peut s'écrire

$$\operatorname{tg} 31°43' + 1 - \sin^2 \lambda = \frac{1}{\cos^2 31°43'} - \sin^2 \lambda = \frac{\sin^2 56°}{\cos^2 60°} - \sin^2 \lambda$$
$$= 4 \sin^2 56° - \sin^2 \lambda.$$

L'équation à intégrer est donc

$$\frac{(0.54)^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = d\lambda - \frac{\cos \lambda \, d\lambda}{\sqrt{4 \sin^2 56° - \sin^2 \lambda}}.$$

L'intégrale est

$$\frac{(0.54)^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta = \lambda - \operatorname{arc\,sin} \frac{\sin \lambda}{2 \sin 36^\circ} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La constante d'intégration est nulle parce que θ et λ s'annulent en même temps.

Pour $\lambda = 36^\circ$, il vient

$$\frac{(0.54)^2}{2} \operatorname{tg} \theta = 36^\circ - \operatorname{arc\,sin} 0.5 = 6^\circ, \quad \text{d'où} \quad \theta = 36^\circ$$

L'équation (4) détermine la relation qui lie θ et λ.

L'équation (5) donne

$$\sqrt{\frac{d\theta}{d\lambda}} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t}{0.54} \cdot \cos \theta.$$

Et l'équation (1) devient

$$\rho = 0.54 \frac{\sin \frac{1}{2} z}{\sin \frac{1}{2} t \cos \theta} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

qui lie ρ à z et λ.

La carte est donc déterminée.

§ **215.** *Déformation locale.* — Nous utilisons la formule (§ 85):

$$2 + 4 \operatorname{tg}^2 \omega = q^2 + q'^2 + \frac{1}{\sin^2 z} [p^2 + p'^2].$$

Les dérivées pp', qq' ont pour valeur (notations du § 100)

$$p = M\rho \cos \theta + R \sin \theta.$$
$$q = - S \sin \theta.$$
$$p' = M\rho \sin \theta - R \cos \theta.$$
$$q' = S \cos \theta.$$

Tenant compte de la relation

$$\sin z = \rho \frac{d\theta}{d\lambda} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

il vient

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \frac{1}{2} z}{\sqrt{M}} - \frac{\sqrt{M}}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2.$$

Le second terme se calcule en dérivant l'équation

$$\rho \cos\theta \sin \tfrac{1}{2} t = (0.54) \sin \tfrac{1}{2} z;$$

on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \cos\theta \sin \frac{1}{2} t + \rho \cos\theta \cos \frac{1}{2} t \frac{1}{2} \frac{dt}{d\lambda} - \rho \sin \frac{1}{2} t \sin\theta \frac{d\theta}{d\lambda} = 0.$$

Le facteur $\frac{dt}{d\lambda}$ se déduit de la relation

$$\operatorname{tg} t \cos \lambda = \operatorname{tg} 31°45',$$

qui donne

$$\frac{dt}{d\lambda} = \operatorname{tg} \lambda \sin t \cos t,$$

et finalement

$$\frac{1}{\sin z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} z} \left[\operatorname{tg}\theta \sqrt{M} - \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sqrt{M}} \cos t \cos^2 \frac{1}{2} t \right].$$

§ **216.** — Déterminons la déformation en quelques points :

I. Le long de l'hypoténuse,

$$\lambda = \theta = 36°, \quad t = 37°22'642, \quad \sqrt{M} = 0.9656382.$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \frac{1}{2} z}{0.965} - \frac{0.965}{\cos \frac{1}{2} z} \right) + \left(\frac{0.465}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2.$$

Au sommet de l'angle 54°,

$$z = 37°22'642, \quad 4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.0384)^2 + (0.1745)^2 = 0.03185, \quad \omega = 5°4'.$$

Au sommet de l'angle 36°,

$$z = 0°, \quad 4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.07)^2 + (0.165)^2 = 0.0320, \quad \omega = 5°4'.$$

A la colatitude 24°,

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = 0.029, \qquad \omega = 4°51'.$$

II. Le long du grand côté de l'angle droit,

$$\lambda = \theta = 0, \qquad \sqrt{M} = 1.017.$$

$$2 \operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \frac{1}{2} z}{1.017} - \frac{1.017}{\cos \frac{1}{2} z};$$

au sommet de l'angle droit,

$$\omega = 3°15'.$$

§ **217.** *Carte II.* — Les orthodromies issues de l'angle 60° sont représentées par des droites.

Prenons pour pôle le sommet de l'angle 60° et pour axe le petit côté de l'angle droit.

Les calculs sont analogues à ceux de la carte I.

La relation de l'authalisme donne

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{d\lambda} = 1 - \cos z.$$

Quand z a une valeur particulière t, déterminée par

$$\operatorname{tg} t \cos\lambda = \operatorname{tg} 20°54',$$

ρ satisfait à la relation

$$\rho\cos\theta = 0.39$$

L'équation à intégrer est

$$\frac{1}{2}\frac{(0.39)^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\lambda} = 1 - \cos t = 1 - \frac{\cos\lambda}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 20°54' + \cos^2\lambda}},$$

qui donne

$$\tfrac{1}{2}(0.39)^2 \operatorname{tg}\theta = \lambda - \arcsin(\sin\lambda\cos 20°54').$$

La constante d'intégration est nulle, parce que λ et θ s'annulent en même temps.

Pour $\lambda = 60°$, on trouve $\theta = 54°$.

§ **218.** *Altérations locales.* — Les formules sont les mêmes que pour la carte I.

$$4\operatorname{tg}^2\omega = \left(\frac{\cos\frac{1}{2}z}{\sqrt{M}} - \frac{\sqrt{M}}{\cos\frac{1}{2}z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin z}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\sin z}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}z}\left[\operatorname{tg}\theta\sqrt{M} - \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sqrt{M}}\cdot\cos t\cos^2\frac{1}{2}t\right].$$

Calculons la déformation en quelques points :

I. Le long du petit côté de l'angle droit,

$$\lambda = \theta = 0, \qquad \sqrt{M} = 0.930, \qquad t = 20°54',$$

$$2 \operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \frac{1}{2} z}{0.930} - \frac{0.930}{\cos \frac{1}{2} z}, \qquad \operatorname{tg} T = \frac{0.930}{\cos \frac{1}{2} z}.$$

Au sommet de l'angle 54°,

$$z = 0, \quad \omega = 4°8'66, \quad \operatorname{tg} T = 1.07, \quad \operatorname{tg}^2 T = \Delta_m = 1.155795.$$

Au sommet de l'angle droit,

$$z = 20°54', \quad \operatorname{tg} T = 1.06, \quad \Delta_m = 1.11775, \quad \omega = 3°11'250.$$

II. Le long de l'hypoténuse,

$$\lambda = 60°, \quad \theta = 54°, \quad t = 37°20', \quad \sqrt{M} = 0.9656382,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \frac{1}{2} z}{0.965} - \frac{0.965}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2 + \left(\frac{0.050}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2.$$

Au sommet de l'angle 54°,

$$z = 0, \quad 4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.07)^2 + (0.05)^2, \quad \omega = 2°28',$$

pour $z = 30°7'530$, le premier terme s'annule

$$\cos \tfrac{1}{2} z = \sqrt{M}, \quad \operatorname{tg} \omega = 0.0259, \quad \omega = 1°30'.$$

Au sommet de l'angle 36°,

$$z = 37°22', \quad \omega = 1°53'.$$

III. Le long de la direction,

$$\lambda = 50°, \quad \theta = 44°58'905, \quad t = 30°43'282, \quad \sqrt{M} = 0.9661861,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{0.966}{\cos \frac{1}{2} z} - \frac{\cos \frac{1}{2} z}{0.966} \right)^2 + \left(\frac{0.0315728}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2,$$

pour $z = 29°53'176$,

$$\operatorname{tg} \omega = 0.01635, \quad \omega = 0°56',$$

pour $z = 0$,

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.068814)^2 + (0.0316)^2, \quad \omega = 2°11'.$$

IV. Le long de la direction,

$$\lambda = 30^\circ, \quad \theta = 26^\circ 18' 219, \quad t = 25^\circ 48' 011, \quad \sqrt{M} = 0.9477852,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \frac{1}{2} z}{0.947} - \frac{0.947}{\cos \frac{1}{2} z}\right)^2 + \left(\frac{0.06517}{\cos \frac{1}{2} z}\right)^2.$$

Pour $z = 0$,

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.1073062)^2 + (0.065)^2, \quad \omega = 3^\circ 35'.$$

Pour $z = 25^\circ 48' 011$,

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.063808)^2 + (0.0665)^2, \quad \omega = 2^\circ 38'.$$

Ces quelques déterminations suffisent pour tracer les équi-déformées. Pour les trois quarts de la superficie de la carte, la déformation ne dépasse pas 3°.

§ **219**. *Carte III.* — Les orthodromies issues de l'angle droit sont représentées par des droites.

Prenons pour pôle le sommet de l'angle droit et pour axe le petit côté du triangle.

La condition de l'authalisme s'exprime par

$$\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = 1 - \cos z.$$

Exprimons que l'hypoténuse est représentée par une droite.

Sur la sphère, abaissons du sommet de l'angle droit une perpendiculaire sur l'hypoténuse. Elle a pour longueur 18° et elle fait avec le petit côté du triangle un angle de 31°43'. L'équation de l'hypoténuse est donc

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\cos (\lambda - 31^\circ 43')}. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Sur la carte, abaissons du sommet de l'angle droit une perpendiculaire sur l'hypoténuse. Elle fait avec le petit côté un angle de 36° et elle a pour longueur

$$0.39 \times \cos 36^\circ = 0.315.$$

L'équation de l'hypoténuse est donc

$$\rho \cos(\theta - 36^\circ) = 0.315. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ainsi, lorsque z a une valeur particulière t, déterminée par l'équation (1), ρ a une valeur déterminée par l'équation (2).

Introduisant ces valeurs dans l'équation de l'authalisme, il vient

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(0.315)^2}{\cos^2(\theta - 36^\circ)} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} = 1 - \cos t.$$

L'intégration de cette équation nous donnera la relation qui lie λ et θ.

Considérons une variable auxiliaire n définie par

$$\cos n = \cos 18^\circ \sin(\lambda - 31^\circ 43'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

On en tire

$$\sin n = \frac{\sin 18^\circ}{\sin t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\operatorname{cotg} n = \cos t \operatorname{tg}(\lambda - 31^\circ 43') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En différentiant (3), on obtient

$$-\sin n \frac{dn}{d\lambda} = \cos 18^\circ \cos(\lambda - 31^\circ 43').$$

Éliminant $\sin n$ par l'équation (4) et $\cos(\lambda - 31^\circ 43')$ par l'équation (1), il vient

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\cos t.$$

L'équation à intégrer devient

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(0.315)^2}{\cos^2(\theta - 36^\circ)} d\theta = d\lambda - \cos t \, d\lambda = d\lambda + dn,$$

dont l'intégrale est

$$\tfrac{1}{2} \cdot (0.315)^2 \operatorname{tg}(\theta - 36^\circ) = \lambda + n - \text{constante}.$$

La constante se calcule par la condition $\lambda = 0$ pour $\theta = 0$; pour $\lambda = 0$, $t = 20^\circ 54'$, $n = 120^\circ$.

Donc la constante vaut

$$120^\circ + \tfrac{1}{2}(0.315)^2 \operatorname{tg} 36^\circ.$$

La deuxième équation de la carte est donc

$$\tfrac{1}{2}(0.315)^2 . [\operatorname{tg} 36^\circ + \operatorname{tg}(\theta - 36^\circ)] = \lambda + n - 120^\circ.$$

Pour $\lambda = 90^\circ$, elle donne $\theta = 90^\circ$.

§ **220.** *Altérations locales.* — La déformation est donnée par

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \frac{1}{2} z}{\sqrt{M}} - \frac{\sqrt{M}}{\cos \frac{1}{2} z} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin z} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2.$$

La dérivée

$$\sqrt{M} = \sqrt{\frac{d\theta}{d\lambda}}$$

se déduit de

$$\sqrt{M} \cdot \frac{0.315}{\cos(\theta - 36^\circ)} = 2 \sin \tfrac{1}{2} t.$$

Le second terme s'obtient en dérivant

$$\rho \cos(\theta - 36^\circ) \sin \tfrac{1}{2} t = 0.315 \sin \tfrac{1}{2} z,$$

$\frac{dt}{d\lambda}$ se calcule en dérivant (1), qui donne

$$\frac{dt}{d\lambda} = \operatorname{tg}(\lambda - 31^\circ 43') \cos t \sin t.$$

Il vient

$$\frac{1}{\sin z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{1}{2} z} \left[\sqrt{M} \cdot \operatorname{tg}(\theta - 36^\circ) - \frac{1}{\sqrt{M}} \operatorname{tg}(\lambda - 31^\circ 43') \cos t \cos^2 \tfrac{1}{2} t \right].$$

Exemple : Au sommet de l'angle 36°,

$$\lambda = \theta = 90^\circ, \quad t = z = 31^\circ 43', \quad \sqrt{M} = 1.017,$$
$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = (0.12)^2 + (0.17)^2 = 0.0434, \quad \omega = 6^\circ.$$

§ 221. *Carte IV.* — Les orthodromies perpendiculaires au long côté de l'angle droit sont représentées par des droites.

Prenons pour équateur (axe des x) le long côté de l'angle droit et pour nul-méridien (axe des y) une perpendiculaire en un point quelconque de l'équateur, par exemple au sommet de l'angle 36°. Nous avons vu au § 149 que, pour les cartes à méridiens rectilignes et parallèles, la condition de l'authalisme est

$$\cos\varphi = pq' = \frac{dx}{d\lambda}\cdot\frac{dy}{d\varphi}.$$

D'où, en intégrant,

$$y = \frac{\sin\varphi}{p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la constante d'intégration est nulle, parce que y et φ s'annulent en même temps.

Pour calculer la relation qui lie x et λ, exprimons que l'hypoténuse est représentée par une droite.

Sur la sphère, l'hypoténuse a pour équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\lambda \operatorname{tg} 36^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et, sur la carte, elle a pour équation

$$y = x \operatorname{tg} 36^\circ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ainsi, lorsque φ a une valeur particulière k, définie par l'équation (2), y satisfait à (3).

Introduisons dans (1) les valeurs de y et de φ fournies par (2) et (3). Il vient

$$x \operatorname{tg} 36^\circ \frac{dx}{d\lambda} = \sin k.$$

Considérons la variable auxiliaire m définie par

$$\sin m = \cos\lambda \sin 36^\circ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d'où l'on tire

$$\cos m = \frac{\cos 36^\circ}{\cos k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En dérivant (4), il vient

$$\cos m \frac{dm}{d\lambda} + \sin \lambda \sin 36^\circ = 0.$$

Éliminant $\cos m$ par (5) et $\sin \lambda$ par (2), il vient

$$-\frac{dm}{d\lambda} = \sin k.$$

L'intégrale est donc

$$\tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} 36^\circ = \text{constante} - m.$$

La constante d'intégration se calcule par la condition $x = 0$ pour $\lambda = 0$; pour cette valeur de λ, $m = 36^\circ$.

On obtient finalement

$$\tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} 36^\circ = 36^\circ - m$$

qui donne la valeur de x en fonction de λ.

L'équation (1) donne la valeur de y en fonction de φ; dans cette formule, p se calcule par la relation

$$px \operatorname{tg} 36^\circ = \sin k.$$

§ **222.** *Altérations locales.* — La déformation est donnée par la formule (§ 149)

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{\cos \varphi}{p} - \frac{p}{\cos \varphi}\right)^2 + \left(\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{d\lambda}\right)^2.$$

Le second terme se calcule en dérivant l'équation qui donne p; il vient

$$\operatorname{tg} 36^\circ \left[p^2 + x \frac{dp}{d\lambda}\right] = \cos k \cdot \frac{dk}{d\lambda}.$$

Le facteur $\frac{dk}{d\lambda}$ s'obtient en dérivant l'équation (2).

Il vient enfin

$$\frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{d\lambda} = \frac{\cos^3 k \cos \lambda}{p^2 x} - \frac{1}{x}.$$

Calculons la déformation en quelques points :

Le long de l'équateur, le second terme est nul.

$$2 \operatorname{tg} \omega = p - \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{tg} T = \frac{1}{p}.$$

Au sommet de l'angle 36°, $p = 1$, la déformation est nulle.

Au sommet de l'angle droit,

$$\lambda = 31°43', \quad k = 20°54', \quad x = 0.54, \quad p = 0.917, \quad \omega = 5°.$$

§ **223**. *Carte V.* — Les orthodromies perpendiculaires au petit côté du triangle sont représentées par des droites.

Il est à prévoir que cette carte donnera une déformation plus grande que la précédente, car le petit côté du triangle est plus grand sur la carte que sur la sphère.

Le problème est analogue au précédent : les équations (2), (3), (4), (5) deviennent respectivement

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} k = \sin \lambda \operatorname{tg} 60°. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$y = x \operatorname{tg} 54° \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\sin m = \cos \lambda \sin 60° \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\cos m = \frac{\cos 60°}{\cos k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Et la deuxième équation de la carte est

$$\tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} 54° = 60° - m.$$

La dérivée $p = \frac{dx}{d\lambda}$ se calcule par la formule

$$px \operatorname{tg} 54° = \sin k.$$

La déformation se calcule comme au paragraphe précédent

$$\frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{d\lambda} = \frac{\operatorname{tg} 60°}{\operatorname{tg} 54°} \cdot \frac{1}{p^2 x} \cdot \cos^3 k \cos \lambda - \frac{1}{x}.$$

Par exemple, calculons la déformation au sommet de l'angle 36°. Soit

$$\lambda = 20°54', \quad \varphi = 31°45'.$$

En ce point,

$$m = 54°, \quad x = 0.39, \quad k = 31°43', \quad p = 0.978, \quad \frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{d\lambda} = 0.62,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{0.85}{0.98} - \frac{0.98}{0.85}\right)^2 + (0.618 \times 0.62)^2 = 0.227, \quad \omega = 15°.$$

§ **224.** *Carte VI.* — Les cercles de latitude sont représentés par des droites parallèles.

Prenons pour nul méridien le petit côté de l'angle droit et pour équateur le long côté.

Sur la carte, l'hypoténuse a pour équation

$$0.39 - y = x \operatorname{tg} 36°. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sur la sphère, elle a une équation qui s'établit en considérant un triangle rectangle dont l'angle aigu vaut 36° et dont les côtés sont φ et $31°43' - \lambda$.

L'équation est

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 36° \sin (31°43' - \lambda). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous représenterons par β l'arc $31°43'$.

L'équation différentielle des cartes authaliques à cercles de latitude rectilignes et parallèles est (§ 87)

$$x \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \lambda \cos \varphi.$$

Tenant compte de (1), il faut intégrer

$$(0.39 - y)\, dy = \operatorname{tg} 36° \times \lambda \cos \varphi \, d\varphi,$$

sachant que λ a une valeur particulière k déterminée par

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 36° \sin (\beta - k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le premier membre s'intègre en introduisant la variable auxiliaire $v = 0.39 - y$; on obtient $\frac{1}{2} v^2$.

Le second membre s'intègre par parties

$$\int k \cos \varphi \, d\varphi = k \sin \varphi - \int \sin \varphi \, dk.$$

Le second terme a pour intégrale l'arc m, défini par

$$\cos m \cos \varphi = \cos 36^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

d'où l'on tire

$$\sin m = \sin 36^\circ \cos (\beta - k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et

$$\operatorname{tg} m = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} (\beta - k)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Il faut démontrer que

$$dm = \sin \varphi \, dk,$$

(4) donne

$$\cos m \, dm = \sin 36^\circ \sin (\beta - k) \, dk;$$

tenant compte de (3) pour éliminer $\cos m$ et de (2) pour éliminer $\sin (\beta - k)$, il vient

$$dm = \sin \varphi \, dk.$$

L'intégrale est donc

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \operatorname{tg} 36^\circ [m - k \sin \varphi - \text{c}^{\text{te}}].$$

Détermination de la constante : Pour

$$k = 0, \quad m = 30^\circ, \quad v = 0,$$

donc

$$\text{constante} = 30^\circ.$$

Pour $k = \beta$,

$$\varphi = 0, \quad m = 36^\circ, \quad \tfrac{1}{2} v^2 = \operatorname{tg} 36^\circ \times 6^\circ, \quad v^2 = 0.152, \quad v = 0.39.$$

L'équation de la carte est ainsi :

$$\tfrac{1}{2} (0.39 - y)^2 = \operatorname{tg} 36^\circ [m - 30^\circ - k \sin \varphi].$$

§ **225.** — La déformation est donnée par la formule (§ 87)

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(q' - \frac{1}{q'}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{q'^2} \left[\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{q'} \cdot \frac{dq'}{d\varphi}\right]^2$$

pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire le long du nul-méridien, la déformation est donnée par

$$\operatorname{tg} \text{T} = q'.$$

La dérivée $q' = \frac{dy}{d\varphi}$ se déduit de l'équation différentielle; il vient

$$q' = \operatorname{tg} 36^\circ \frac{k \cos \varphi}{v}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

d'où, en dérivant,

$$v \frac{dq'}{d\varphi} - q'^2 = \operatorname{tg} 36^\circ \left[\cos \varphi \frac{\partial k}{\partial \varphi} - k \sin \varphi\right].$$

$\frac{dk}{d\varphi}$ se déduit de (2),

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \operatorname{tg} 36^\circ \cos(\beta - k)\, dk = 0.$$

d'où, en tenant compte de (3) et (4),

$$\cos \varphi \frac{\partial k}{\partial \varphi} = - \operatorname{cotg} m.$$

Il vient ainsi

$$v \frac{dq'}{d\varphi} - q'^2 = \operatorname{tg} 36^\circ \left[- \operatorname{cotg} m - k \sin \varphi\right], \quad \ldots \quad (7)$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(q' - \frac{1}{q'}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{q'^2}\left[\frac{k \cos^2 \varphi}{v^2} \operatorname{tg} 36^\circ - \frac{1}{k} \operatorname{cotg} m\right]. \quad (8)$$

Calculons la déformation en quelques points :

I. Au sommet de l'angle droit,

$$\lambda = 0, \quad \varphi = 0, \quad v = 0.59, \quad k = 31^\circ 43',$$

$$\operatorname{tg} T = q' = \frac{31^\circ 43'}{0.59} \operatorname{tg} 36^\circ = 1.03, \quad \omega = 2^\circ.$$

II. Au milieu du petit côté,

$$k = 31^\circ 43' - 14^\circ 2',733, \quad v = 0.207, \quad \lambda = 0, \quad \varphi = 10^\circ,$$

$$m = 54^\circ 45',9, \quad \operatorname{tg} T = q' = \frac{17^\circ 40'}{0.207} \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cos 10^\circ = 1.065,$$

$$\omega = 3^\circ 40'.$$

III. Au sommet de l'angle 54°,

$$k = 0, \quad v = 0, \quad \operatorname{tg} T = q' = \frac{0}{0}.$$

mais, pour ce point, l'équation (7) est

$$q'^2 = \operatorname{tg} 36^\circ \operatorname{cotg} 30^\circ = 1.25, \quad \operatorname{tg} T = 1.115, \quad \omega = 6^\circ 54' 212.$$

IV. Au sommet de l'angle 36°,

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(1.05 - \frac{1}{1.03}\right)^2 + \frac{0.152}{\operatorname{tg}^2 36^\circ}\left[\frac{31^\circ 43'}{0.152} \operatorname{tg} 36^\circ - \frac{\operatorname{cotg} 36^\circ}{31^\circ 43'}\right]^2.$$

§ **226**. *Carte VII.* — Les petits cercles parallèles au petit côté de l'angle droit sont représentés par des droites parallèles.

Prenons pour nul-méridien le grand côté de l'angle droit. Le problème se traite de la même manière qu'au paragraphe précédent.

Les équations (1), (2), (3), (4), (5) deviennent respectivement :

(1) $\qquad 0.54 - y = x \operatorname{tg} 54^\circ.$

(2) $\qquad \operatorname{tg} = \operatorname{tg} 60^\circ \sin(\beta - k) \quad$ où $\quad \beta = 20^\circ 54'.$

(3) $\qquad \cos m \cos \varphi = \cos 60^\circ.$

(4) $\qquad \sin m = \sin 60^\circ \cos(\beta - k).$

(5) $\qquad \operatorname{tg} m = \dfrac{\sin \varphi}{\operatorname{tg}(\beta - k)}.$

L'intégrale est

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}(0.54 - y)^2 = \operatorname{tg} 54^\circ [m - k \sin \varphi - \text{c}^{\text{te}}],$$

pour $k = 0, \quad v = 0, \quad m = 54^\circ,$ donc constante $= 54^\circ,$

pour $k = 20^\circ 54' = \beta, \quad \varphi = 0, \quad m = 60^\circ,$

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \operatorname{tg} 54^\circ \times 6^\circ, \quad v = 0.54.$$

L'équation de la carte est

$$\tfrac{1}{2}(0.54 - y)^2 = \operatorname{tg} 54^\circ [m - 54^\circ - k \sin \varphi].$$

Les équations (6), (7), (8) deviennent :

(6) $\qquad q' = \operatorname{tg} 54^\circ \dfrac{k \cos \varphi}{v}.$

$$(7) \qquad v\frac{dq'}{d\varphi} - q'^2 = \operatorname{tg} 54^\circ \left[- \operatorname{cotg} m - k \sin \varphi \right].$$

$$(8) \qquad 4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(q' - \frac{1}{q'} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{q'^2} \left[-\frac{1}{k} \operatorname{cotg} m + \operatorname{tg} 54^\circ \frac{k \cos^2 \varphi}{v^2} \right]^2.$$

§ **227.** — Calculons la déformation en quelques points :

I. Le long du nul méridien, le second terme est nul.

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(q' - \frac{1}{q'} \right)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} T = q'.$$

Au sommet de l'angle droit,

$$\varphi = 0, \quad k = 20^\circ 54', \quad v = 0.54, \quad \operatorname{cotg} T = 0.935345, \quad \omega = 3^\circ 50'.$$

Au milieu du long côté de l'angle droit,

$$\varphi = 15^\circ, \quad m = 58^\circ 50', \quad k = 12^\circ, \quad v = 0.289,$$

$$\operatorname{cotg} T = \frac{12^\circ}{0.289} \operatorname{tg} 54^\circ \cos 15^\circ = 0.966, \quad \omega = 2^\circ.$$

Au sommet de l'angle 56°,

$$m = 54^\circ, \quad k = 0, \quad v = 0,$$

la formule (6) donne

$$q' = \frac{0}{0},$$

mais l'équation (7) donne

$$q'^2 = \operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{cotg} 54^\circ = 1.$$

La déformation est nulle.

II. Le long du petit côté de l'angle droit,

$$q' = 0.935, \quad k = 20^\circ 54', \quad v = 0.54,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \omega = \left(\frac{1}{0.935} - 0.935 \right)^2 + \frac{\lambda^2}{q'^2} \left[\frac{20^\circ 54'}{12^\circ} - \frac{\operatorname{cotg} 60^\circ}{20^\circ 54'} \right]^2$$

$$= (0.133784)^2 + \frac{\lambda^2}{(0.935)^2} (0.159717)^2.$$

Au sommet de l'angle 54°,

$$\lambda = 20°54', \quad 4\,\mathrm{tg}^2\,\omega = 0.0179 + 0.00588 = 0.0218, \quad \omega = 4°15'.$$

§**228**. — Ainsi, la carte donnant la plus petite déformation maximum est la carte II ($\Delta m = 1.155$).

Comparons cette déformation à celle que donnerait une carte azimutale ayant la même superficie que le pentagone : la calotte sphérique équivalente a pour rayon 33°33'440, calculé par

$$\cos z = \frac{5}{6}.$$

La déformation est donnée par

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{T} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z} = \frac{12}{11} = 1.09091 = \Delta_m,$$

$$4\,\mathrm{tg}^2\,\omega = \frac{1}{132}, \quad \mathrm{tg}\,\omega = \frac{1}{22.9783} = 0.0435, \quad \omega = 2°29'15.$$

§ **229**. — Il reste à rechercher de quelle manière il convient d'orienter le dodécaèdre par rapport au globe. Cette orientation dépend du genre de carte que l'on se propose de dresser (carte marine, agricole, commerciale, etc.)

Nous ne traiterons qu'une seule manière; à titre d'exemple, nous placerons sous chaque pôle géographique le centre d'une face du dodécaèdre : la mappemonde se compose ainsi de deux cartes polaires et de dix cartes équatoriales.

La planche *W* représente en BCDE la moitié d'une carte équatoriale, et en BCP le dixième d'une carte polaire. Les lignes PE et PD représentent deux méridiens angulairement distants de 36°.

Les latitudes des divers points du pentagone sont :

F	0°
D, E	10°48''44''31
A	26°33'54''20
G	31°43'2''9
C	52°37'21''49
B	58°16'37''10
P	90°.

§ **230.** — Proposons-nous de dessiner le réseau des parallèles et méridiens géographiques pour une carte II (déformation minimum), et pour cela calculons les coordonnées cartographiques des points a, b, c.

Soit, par exemple, le point w, de longitude 18° et de latitude 40°. Il se trouve dans le triangle ACG et, par rapport à CG, il a pour coordonnées sphériques

$$GCw = \lambda = 51°26'6''09$$
$$Cw = z = 17°37'22''09$$

calculées par la résolution du triangle PwC.

Par les formules du § 217, nous obtenons les coordonnées cartographiques

$$\theta = 45°59'22''71$$
$$\rho = 0.315.$$

Transformons ces coordonnées en coordonnées cartésiennes par rapport à C. Il vient

$$x = 0.27981$$
$$y = 0.148714.$$

Ajoutons-les aux coordonnées de C, nous obtenons enfin

$$X = 0.27981$$
$$Y = 0.24157.$$

Le tableau D donne les éléments du calcul des coordonnées de quelques points de la carte (*).

§ **231.** — On pourra tracer le réseau des parallèles et méridiens quand on aura calculé des points en nombre suffisant.

La planche W donne une carte authalique à un globe d'un rayon de 10 centimètres; il nous suffira de vingt-trois points pour tracer le réseau.

(*) Sur la planche W, le point i est à l'intersection du méridien BE avec le parallèle αm.

Les lignes *im*, *jn*, *kp*, *dq*, *er* pourront être remplacées par des arcs de cercle dont le centre et le rayon sont respectivement :

Latitude.		50°	40°	30°	20°	10°
R =		107	168	171	224	505
Centre	X	— 95	— 138	— 124	— 159	— 423
	Y	— 5	— 5	+ 2	+ 1	— 25.

Nous remarquons que le cercle de latitude 50° est normal aux méridiens BE et CD.

Pour la carte polaire, remarquons que

$$Pg = 34.281663 \quad \text{et} \quad Pb = 35.076454,$$

ces deux rayons sont dans le rapport 1.02.

De même,

$$Ph = 50.861724, \quad Pa = 53.040477,$$

ces deux rayons sont dans le rapport 1.04.

Nous remplacerons ces lignes par des arcs de cercle ayant pour rayon respectivement 34.68 et 51.95.

CONCLUSIONS

Nous nous proposons, comme conclusion du présent travail, de répondre à la question :

« Comment faut-il faire choix d'un système cartographique pour dresser la carte d'une région donnée, la carte étant destinée à tel usage ou destinée à illustrer tel fait géographique ? »

Il faut tout d'abord faire choix d'une échelle moyenne, et en déduire alors si la carte sera dressée en une ou plusieurs feuilles.

PREMIER CAS. — *Carte en plusieurs feuilles.*

Si la diagonale de chaque feuille s'étend sur moins de 9°, le choix du système est arbitraire. On donnera la préférence au système le plus simple, par exemple la carte de Postel.

Si la diagonale de chaque feuille s'étend sur plus de 9°, on s'inspirera des considérations développées dans la cinquième partie du présent Mémoire.

DEUXIÈME CAS. — *Carte en une seule feuille.*

A. — Si la plus grande dimension de la région est inférieure à 9°, on choisira une carte azimutale simple, par exemple la carte de Postel.

B. — Si la largeur de la région est inférieure à 5°, on choisira une carte cylindrique, par exemple la carte plate carrée.

C. — Le problème ne présente de l'intérêt que lorsque la région a des dimensions plus grandes que celles indiquées ci-dessus.

Faut-il, ainsi que le préconisent la plupart des auteurs, enfermer la région dans un contour géométrique, et s'inspirer de la forme de ce contour pour faire choix d'un système ?

Nous estimons que ce procédé ne donne pas toujours la meilleure solution ; l'étude que nous avons présentée des cartes étoilées, montre les avantages certains de pareilles cartes, et nous conduit à adopter une autre méthode.

Nous pensons qu'il ne faut pas chercher tout d'abord la solution mathématique du problème, mais plutôt considérer le problème cartographique commé étant « le moyen d'assembler judicieusement plusieurs fragments de carte qui ne peuvent se juxtaposer ».

La méthode que nous proposons consiste en un partage préalable de la région en plusieurs tronçons ; ce partage se fait en s'inspirant des conditions du problème : si, par exemple, on doit illustrer des faits géographiques n'intéressant que les continents, il n'importe pas que les mers et parties de mer soient exactement représentées, et l'on attribuera un fragment à chacune des presqu'îles. Ainsi, pour la carte d'Asie, le travail préliminaire consistera à faire une carte séparée de la Sibérie, du Thibet, du Turkestan, de la Chine, du Japon et de chacune des presqu'îles (Asie-Mineure, Arabie, Hindoustan, Indo-Chine, Kamchatka). Les lignes de séparation entre ces dix fragments seront des lignes simples, par exemple, des cercles de latitude ou des orthodromies.

Après avoir dressé la carte de chacune des dix parties, on procédera à l'assemblage de ces fragments. Cette opération se fait de manière à satisfaire aux conditions du problème : telles distances ou telles superficies doivent être à la même échelle, tels orientements doivent être mis en évidence, telles parties de la carte doivent être altérées aussi peu que possible, la carte doit être authalique ou orthomorphe, etc.

L'assemblage terminé, la juxtaposition ne sera pas complète : en certains endroits, il y aura des vides ; en certains points, les fragments seront imbriqués.

L'opération suivante consiste à prendre sur papier calque le

réseau des parallèles et méridiens tel qu'il figure sur cet assemblage provisoire. Ces lignes ne se raccordent pas exactement à la démarcation des fragments : on effectuera le raccord au sentiment. Ce réseau, ainsi décalqué, peut être adopté définitivement si aucune condition rigoureuse n'est imposée.

Mais si l'on s'est imposé une condition mathématique, par exemple, que la carte soit authalique ou orthomorphe, ou que telles lignes soient représentées par des droites, il faut procéder à la correction de ce réseau.

Pour effectuer cette correction, on traduira en équations la forme des parallèles du réseau provisoire, et l'on calculera quelle doit être, pour satisfaire aux conditions imposées, la forme des méridiens.

Il sera bon de refaire ces calculs en traduisant la forme des méridiens et en calculant la forme des parallèles.

Le réseau ainsi calculé sera adopté définitivement; les équations fourniront les formules à employer pour situer sur la carte les divers points donnés par leurs coordonnées géographiques. Ces équations permettent d'établir les formules pour calculer les altérations locales et intégrales.

LISTE DES OUVRAGES CONSULTÉS

I. **Lespagnol,** L'évolution de la terre et de l'homme. Delagrave. Paris.

II. **Vidal Lablache** et **Caména d'Alméida,** Cours de géographie à l'usage de l'enseignement secondaire. Armand Collin. Paris, 1903.

III. **Van Elven,** Géographie générale à l'usage de l'enseignement moyen. Lebègue. Bruxelles, 1901.

IV. **Seidlitz,** Géographie. Hirt. Breslau, 1902.

V. **Vidal Lablache,** Atlas général. Collin. Paris, 1901.

VI. **Phillips,** Systematic Atlas Phillip. Londres.

VII. **Ule,** Lehrbuch der Erdkunde für höhere Schulen. Freytag. Leipzig, 1904.

VIII. **Sydow-Wagner,** Methodischer Schul-Atlas. Justus Perthes. Gotha, 1904.

IX. **Bartholomew,** International Student's Atlas. Newnes. Londres.

X. **Fisher,** Methodik des Unterrichts in der Erdkunde. Hirt. Breslau, 1903.

XI. **Dennert,** Lehrbuch der Erdkunde. Justus Perthes. Gotha, 1902

XII **Germain,** Les projections cartographiques. Paris.

XIII. **Tissot,** Mémoire figurant aux « Nouvelles Annales de Mathématiques », 1879 à 1882.

XIV. **Morisson,** Maps. Their use and construction. Londres, 1902.

XV. **Vital,** Kartenentwurfslehre. Leipzig, 1903.

XVI. **Zöppritz,** Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Leipzig, 1899.

XVII. **Coordes,** Kleines Lehrbuch der Landkarten-Projectionen. Leipzig, 1896.

XVIII. **Dinse,** Kartenkunde. Leipzig, 1901.

XIX. **Stromeyer,** Communication faite au Congrès de géographie de Berlin, 1903.

XX **Faye,** Cours d'astronomie. Gauthier-Villars. Paris

TABLEAUX

TABLEAU *A*.

		y	Δ_m	Δ_s	$tg^2 T_m$	Valeur pour amplitude de 60°. Δ_m	Δ_s	$tg^2 T_m$	ω_m
Cartes cylindriques	orthom.	$\int \frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\cos^2 \varphi}$	1	2	4	1	0
	authal.	$\sin \varphi$	$\frac{1}{\cos^2 \varphi}$	1	$\frac{1}{\cos^2 \varphi}$	4	1	4	37°
	authal.	$n \sin \varphi$	$\frac{1}{\cos \varphi_1}$	1	$\frac{1}{\cos \varphi_1}$	2	1	2	19°30′
	carrée.	φ	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	2	2	2	19·30′
	parallélog.	$n\varphi$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}}$	2	2	1.41	9·50′
	perspect.	$tg \varphi$	$\frac{1}{\cos^2 \varphi}$	$\frac{1}{\cos^3 \varphi}$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	4	8	2	19°30′

Cartes azimutales	stéréogr.	$2 \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{\xi}{2}}$	$\frac{1}{\cos^4 \frac{\xi}{2}}$	1	1.33	1.78	1	0
	authal.	$2 \sin \frac{\xi}{2}$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{\xi}{2}}$	1	$\frac{1}{\cos^2 \frac{\xi}{2}}$	1.33	1	1.33	8°15′
	Postel.	z	$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{z}{\sin z}$	1.21	1.21	1.21	5°30′
	ortograph.	$\sin z$	$\frac{1}{\cos z}$	$\frac{1}{\cos z}$	$\frac{1}{\cos z}$	2	2	2	19 30′
	gnomon.	$\operatorname{tg} z$	$\frac{1}{\cos^2 z}$	$\frac{1}{\cos^3 z}$	$\frac{1}{\cos z}$	4	8	2	19°30′
	Breusing.		$\frac{1}{(\cos \frac{\xi}{2})^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1 + \cos^2 \xi}{2 \cos^3 \xi}$	$\frac{2}{1 + \cos^2 \xi}$	1.238	1.345	1.141	3 50′
	cosinus.		$?$	$\frac{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}{(\cos^2 \xi)^{k+1}}$	$\frac{1}{\cos^2 \xi + k \sin^2 \xi}$				

TABLEAU *B.* — *Cartes sinus-tangente.*

	AUTHALIQUE.	SINUS.	POSTEL.	TANGENTE.	STÉRÉOG.
ρ	$2 \sin \frac{1}{2} z$	$n \sin \frac{z}{n}$	z	$n \operatorname{tg} \frac{z}{n}$	$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} z$
$m_p = a = \frac{\rho}{\sin z}$	$\frac{1}{\cos \frac{1}{2} z}$	$\frac{n}{\sin z} \cdot \sin \frac{z}{n}$	$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{n}{\sin z} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{n}$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z}$
$m_m = b = \frac{d\rho}{dz}$	$\cos \frac{1}{2} z$	$\cos \frac{z}{n}$	$1.$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{z}{n}}$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z}$
$S = a \times b$	$1.$	$\frac{n}{\sin z} \cdot \sin \frac{z}{n} \cos \frac{z}{n}$	$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{n}{\sin z} \cdot \frac{\sin \frac{z}{n}}{\cos^3 \frac{z}{n}}$	$\frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2} z}$
$\operatorname{tg}^2 T = \frac{a}{b}$	$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} z}$	$\frac{n}{\sin z} \operatorname{tg} \frac{z}{n}$	$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{n}{\sin z} \cdot \sin \frac{z}{n} \cos \frac{z}{n}$	$1.$
$S \times \operatorname{tg}^4 T = \frac{a^3}{b}$	$\frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2} z}$	$\frac{n^3}{\sin^3 z} \cdot \frac{\sin^3 \frac{z}{n}}{\cos \frac{z}{n}}$	$\frac{z^3}{\sin^3 z}$	$\frac{n^3}{\sin^3 z} \cdot \frac{\sin^3 \frac{z}{n}}{\cos \frac{z}{n}}$	$\frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2} z}$

TABLEAU *C.* — *Cartes polyédriques.*

	tg^2T	Δ_m	Δ_s
12 cartes pentagonales.	1.26	1.59	2
Les $\frac{9}{10}$ du globe	1.17	1.38	1.62
20 cartes triangulaires	1.26	1.59	2
Les $\frac{65}{100}$ du globe	1.07	1 14	1.22
8 cartes triangulaires.	1.73	3	5.20
Les $\frac{73}{100}$ du globe	1.22	1.5	1.88
6 cartes carrées	1.73	3	5.20
Les $\frac{88}{100}$ du globe	1.41	2	2.83
4 cartes triangulaires	3	9	27
Les $\frac{84}{100}$ du globe	1.73	3	5.20

TABLEAU *D*.

	X	Y	x	y	z	λ	t	$\lambda - m$	θ	log ρ
B	0	0								
A	5369,0666	0								
E	12005,5984	0	6636,3518							
P	— 5369,0666	0								
C	0	3900,8349								
D	x	6311,7161	7419,8666	2410,8612						
G	x	5106,2855	3709,9535	1205,4306						
F	9712,7335	y	2292,8651	3155,8572						
g	— 1940,9003	0	—	—	—	30°10′ 4″55				
h	— 282,8942	0	—	—	—	4°48′12″25				
i	1369,6094	0	—	—	—	22°41′38″40				
j	3043,1203	0	—	—	—	42°47′47″26				
k	4762,7308	0	—	—	—	56°26′55″15				
m	x	4052,9100	467,9773	152,0331	2°37′21″50	0	—	—	0	
n	x	4631,2734	2247,9969	730,4185	12°37′21″50	0	—	—	0	
p	4011,7408	5204,3487	3408,1258	1107,3674	19°14′15″70	0	—	—	0	
q	5782,0300	5779,3472	1637,8166	532,1689	9°14′15″70		—	—	0	

r	7599,0507	6065,1179	179,4641	246,3982	—	0	—	—	0	
s	11826,4545	y	idem.	idem.	—	0	—	—	0	
l	0	1800,3508	0	2100,3241	—	0	—	—	0	
a	— 1078 0020	3147.6404	1078,0020	783,2145	7°22′38″51	60	—	—	54	.1246620
b	— 2531,2586	2061,7871	2531,2586	1839,0678	17 22′38″51	60	—	—	54	.4953790
d	6503,3617	0	5502,2367	0	30°48′44″15	60	—	—	54	
e	8264,5717	0	3741,0267	0	20°48′44″15	60	—	—	54	
f	10054,1508	0	1951 4476	0	10°48′44″15	60	—	—	54	
c	11858,7812	0	146,8172	0	48′44″15	60	—	—	54	
v	4582,1561	2680,1778	2837,7105	3631,5585	25°28′10″70	38°29′ 7″70	26° 0′39′ 53	10583″57	33°59′44″40	.6635841
w	x	2413,7114	2798,1508	1487,1435	17°37′22″09	51°26′ 6″09	31°29′46″76	16245″03	45°59′22″71	.5008913
α	x	2110 6231	1105,5125	1790,2208	11°31′12″79	35°57′57″15	22 41′45″94	9690″61	31°41′47″00	.3230587
u	6324,8296	2959,1146	1095,0570	3352,6015	19°36′37″87	59°54′19″49	37°17′54″70	21529″52	53°54′42″36	.5473935
t	8016,4984	3112,9705	5966,3178	3198 7456	17°43′12″39	29° 1′58″91	23 35′55″30	7463″23	25°26′ 4″44	.5124058
	X	Y	x	y	z	λ	t	$\lambda - m$	0	log ρ

TABLEAU DES FORMULES.

(1). $dx = p d\lambda + q d\varphi.$ $\qquad m^2 = (dx^2 + dy^2)\dfrac{1}{R^2 d\varphi^2 [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha]}.$

(2). $dy = p' d\lambda + q d\varphi.$

(6). $m_m^2 = q^2 + q'^2.$ $\qquad (8).\quad m^2 = \dfrac{p^2 + p'^2}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \alpha + (q^2 + q'^2) \cos^2 \alpha + 2 \dfrac{pq + p'q'}{\cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha.$

(7). $m_p^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \varphi} [p^2 + p'^2].$

$$(9).\quad m^2 = m_p^2 \sin^2 \alpha + m_m^2 \cos^2 \alpha + \frac{2(pq + p'q')}{\cos \varphi} \cos \alpha \sin \alpha.$$

(17). $2 \operatorname{tg} \omega = \dfrac{a - b}{\sqrt{ab}} = \operatorname{tg} T - \operatorname{cotg} T.$

$$(18).\quad \sin \omega = \frac{a - b}{a + b}, \qquad \operatorname{tg} T = \operatorname{tg} \omega + \sec \omega.$$

1re classe. $\quad p = 1, \quad p' = 0, \quad q = 0, \quad q' = \dfrac{dy}{d\varphi}, \quad m_m = \dfrac{dy}{d\varphi}, \quad m_p = \dfrac{1}{\cos \varphi}.$

2e classe. $\quad m_m = \dfrac{\partial \rho}{\partial z}, \quad m_p = \dfrac{\rho}{\sin z}.$

3e classe. $\quad \rho = \sin z \dfrac{k + 1}{k + \cos z}, \quad m_p = \dfrac{k + 1}{k + \cos z}, \quad m_m = (k + 1) \dfrac{1 + k \cos z}{(k + \cos z)^2}.$

4e classe. $\quad m_m = \dfrac{\partial \rho}{\partial z}, \quad m_p = n \dfrac{\rho}{\sin z}.$

$$a = \sqrt{K} + \sqrt{L}, \quad b = \sqrt{K} - \sqrt{L}, \quad 4K = \left(\frac{p}{\cos\varphi} + q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{\cos\varphi} - q\right)^2, \quad 4L = \left(\frac{p}{\cos\varphi} - q'\right)^2 + \left(\frac{p'}{\cos\varphi} + q\right)^2 \quad (24)$$

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{L}{K}}, \qquad S = \frac{1}{\cos\varphi}[pq' - p'q].$$

Authalisme. $\cos\varphi = pq' - p'q$, $\quad \operatorname{tg}^2\omega = L$, $\quad \operatorname{tg}^2 T_m = \Delta_m$, $\quad 4\operatorname{tg}^2\omega = -2 + q'^2 + q^2 + \dfrac{p^2 + p'^2}{\cos^2\varphi}$.

Orthomorphic. $du = -\dfrac{d\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{dz}{\sin z}$, $\quad p - q'\cos\varphi = 0$, $\quad p' + q\cos\varphi = 0$, $\quad p + Q' = 0$, $\quad p' - Q = 0$. (25)

5e classe (cartes authaliques). $4\operatorname{tg}^2\omega = \left(q' - \dfrac{1}{q'}\right)^2 + \dfrac{\lambda^2}{q'^2}\left[\sin\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{q'}\cdot\dfrac{dq'}{d\varphi}\right]^2$.

6e classe (cartes authaliques). $\sin z = \rho\dfrac{d\theta}{d\lambda}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}$, $\qquad \theta = \dfrac{\lambda}{\rho}\cdot\dfrac{\sin z}{\dfrac{d\rho}{dz}} + \psi(z)$.

7e classe (cartes polyconiques). $\rho = \operatorname{cotg}\varphi$, $\qquad x = \rho\sin\theta$, $\qquad y = \varphi + \rho(1 - \cos\theta)$.

PLANCHES

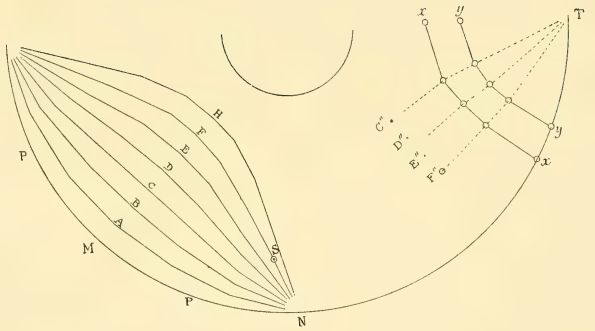


PLANCHE *K*.

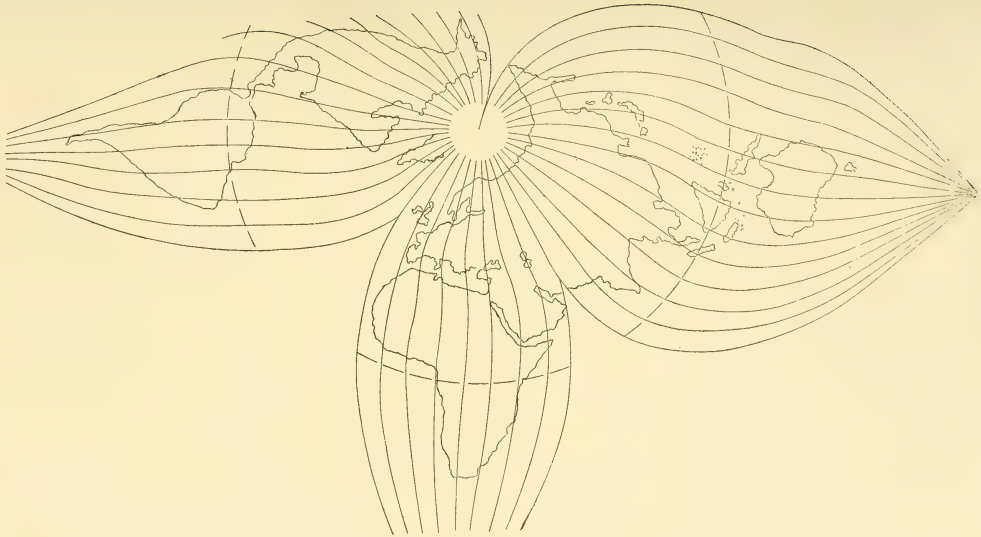


PLANCHE *L*.

PLANCHE *M*.

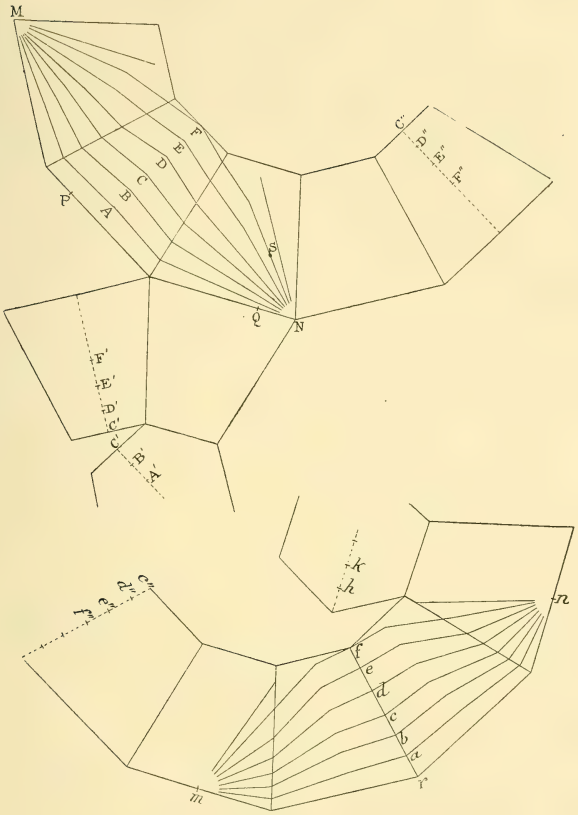


PLANCHE *N*.

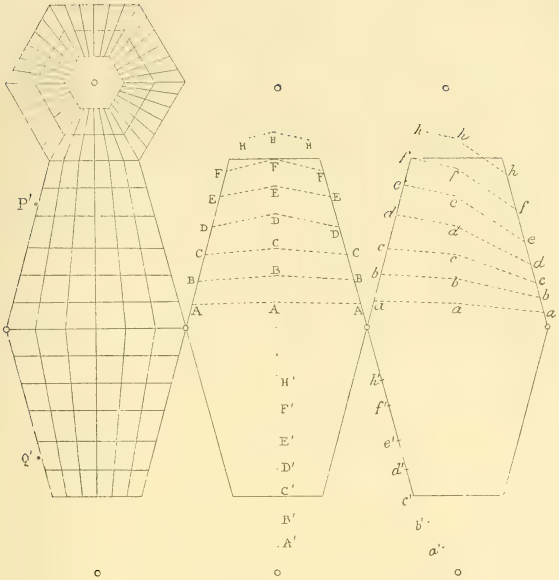


Planche *P*.

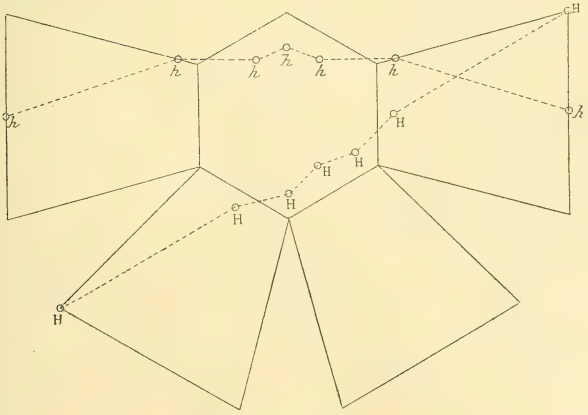


Planche *Q*.

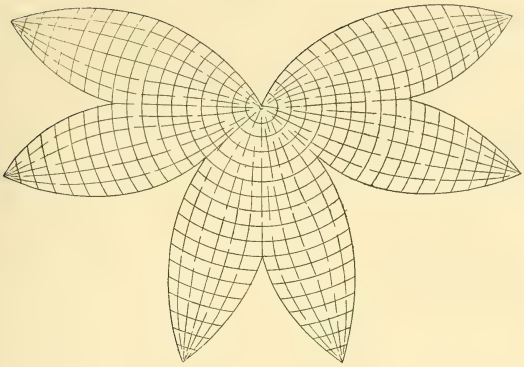


PLANCHE *R*.

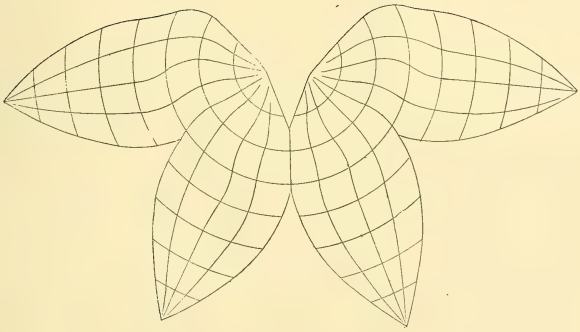


PLANCHE *S*.

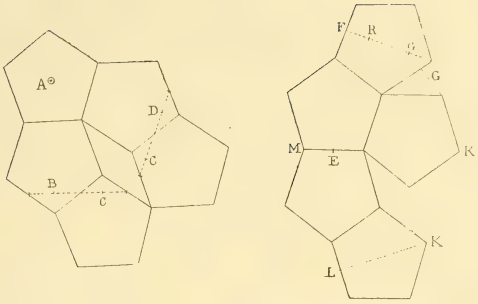


PLANCHE *U*.

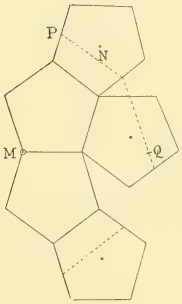


PLANCHE *V*.

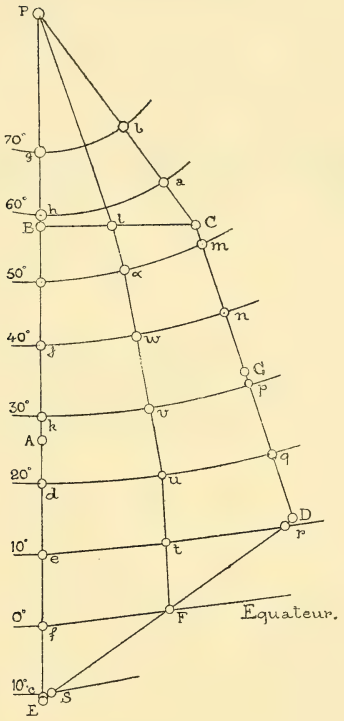

P
70°
g
b
a
60°
h
B
l
C
m
50°
α
n
40°
j
w
G
p
30°
v
h
A
q
20°
d
u
D
p
10°
e
t
0°
f
F
Equateur.
10°
E
S

PLANCHE *W*.

CINQ ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PAR

M. STUYVAERT

DOCTEUR SPÉCIAL EN MATHÉMATIQUES

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

Le prix François Deruyts pour la géométrie supérieure a été accordé par l'Académie royale de Belgique aux *Études* actuelles présentées conjointement avec une dissertation sur *Quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre*.

L'auteur remercie la Société royale des Sciences de Liége d'avoir décidé l'insertion dans ses *Mémoires*, qui contiennent de nombreux et importants travaux de géométrie.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

Avant-propos v

I. Applications géométriques de la théorie des matrices . . 1

II Congruences de variétés algébriques annulant des matrices 94

III. La théorie des matrices dans l'espace réglé 120

IV. Sur une forme doublement quadratique binaire et symétrique 133

V. Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques 155

AVANT-PROPOS

La direction dans laquelle nous espérons faire faire quelque progrès à la Géométrie analytique est indiquée dans l'énoncé suivant, qui constitue une des thèses annexées à notre Dissertation de doctorat spécial de 1902 :

« La Géométrie, en appliquant la théorie de l'élimination » entre deux équations algébriques, n'utilise guère que la con- » dition d'existence d'une seule racine commune. Les condi- » tions pour que les équations aient plus d'une racine commune » peuvent donner aussi des résultats géométriques intéressants. »

Cette idée simple est assez féconde pour mériter un exposé systématique.

N'était notre répugnance à créer des vocables nouveaux, nous aurions proposé d'appeler *surélimination* ou *hyperélimination*, la recherche des conditions pour que deux équations aient plus d'une racine commune. Et ce néologisme aurait pu servir de titre à notre travail.

Nous avons préféré l'intituler *Études*, et en effet, il se compose de cinq chapitres faciles à transformer en articles indépendants. Pourtant l'unité n'y manque pas, croyons-nous : l'élimination et la surélimination forment comme la trame de ces diverses études, surtout des trois premières qui contiennent l'exposé des principes. La quatrième doit être considérée comme une introduc-

tion à la suivante; toutes deux sont des applications moins immédiates des théories du début.

Qu'il s'agisse d'élimination simple ou de surélimination, le résultat conduit à l'évanouissement d'une matrice rectangulaire ou d'un déterminant. Ce mode d'écriture matérialise en quelque sorte la génération d'êtres géométriques par des formes projectives; les détails de structure d'une matrice correspondent à des propriétés de la variété qu'elle représente.

Cette notation souligne à la fois l'analogie et les différences entre le symbolisme algébrique et le langage synthétique; si ce dernier oblige à serrer de près les problèmes particuliers, l'autre, par contre, ouvre aux recherches un champ plus étendu (*).

Gand, le 14 avril 1906

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites, quelques travaux relatifs au sujet que nous traitons ou à des sujets analogues, ont été publiés et sont venus à notre connaissance. Dans les pages ci-après, nous signalerons entre crochets [ ] les renseignements plus récents que notre manuscrit.

CINQ ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

I

Applications géométriques de la théorie des matrices.

Les conditions pour que deux équations en x aient au moins deux racines communes sont au nombre de deux et peuvent s'exprimer par l'évanouissement d'une matrice à l lignes et $l+1$ colonnes. Si les éléments d'un tel tableau sont des formes ternaires ou quaternaires, on a respectivement la représentation d'un nombre fini de points ou d'une courbe gauche.

Il est naturel que nous exposions quelques généralités relatives à ces courbes gauches. Leur ordre, leur genre et d'autres résultats relevant de la géométrie énumérative peuvent se déduire de relations très générales établies par M. Giambelli (*) dans un beau mémoire où l'on trouvera toutes les indications bibliographiques; l'auteur cite notamment MM. Schubert et Segre.

On ne peut qu'admirer le degré d'abstraction auquel est

(*) Giambelli, *Rend. Ist Lomb.*, 1904, pp. 101-135.

arrivé M. Giambelli, et quant à ses résultats, on peut dire qu'ils sont complets et définitifs.

Bien que nous ayons été moins loin dans la voie des généralisations, nous avons, dans des recherches contemporaines de celles de M. Giambelli, et qu'il nous a fait l'honneur de citer, trouvé des relations concordant avec les siennes. Nous avons déjà donné une partie de nos résultats dans un billet cacheté déposé à l'Académie royale de Belgique (février 1904) et dans les articles suivants : 1° *Sur les plans coupant un système de lignes de l'espace en six points d'une conique* (*); 2° *Sur la courbe lieu des contacts des surfaces de deux faisceaux* (**); 3° *Sur les points singuliers des lieux géométriques* (***). A plus d'un endroit de ces travaux, nous avons fait pressentir que nos méthodes pouvaient prétendre à des résultats plus étendus que ceux que nous donnions. Le principe de ces méthodes est énoncé dans la première thèse annexée à notre Dissertation : *Étude de quelques surfaces engendrées par des courbes du second et du troisième ordre.* (Gand, Hoste, et Paris, Gauthier-Villars, juillet 1902.)

Ceci soit dit pour établir le droit que nous croyons avoir de donner le premier paragraphe ci-après, à titre de travail original et indépendant. Malgré cela, nous reconnaissons volontiers à M. Giambelli et la priorité de la publication et une plus grande étendue de résultats.

Mais, toute question de droit à part, avons-nous des raisons d'exposer, après le savant auteur italien, des recherches dont nous avouons la portée plus restreinte? Ces raisons, les voici. Notre but n'est pas la Géométrie énumérative, dont les relations générales ne se prêtent pas toujours facilement aux cas particuliers. En vue de résultats plus concrets et plus simples, nous indiquons plutôt la marche à suivre pour faire, dans chaque problème spécial, le calcul nécessaire. Toutefois, mais seule-

---

(*) *Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique,* 1902.

(**) *Rend. circolo matem. Palermo,* mai 1904.

(***) *Mém. in-8° de la Soc. royale des sciences.* Liége, septembre 1904.

ment en passant, nous donnons aussi quelques formules assez étendues.

Pour bien montrer quel point de vue nous avons adopté, nous faisons suivre ces prémisses de l'étude, non pas complète, mais pourtant assez détaillée, de quelques courbes représentées par des matrices. Les plus simples de ces figures ont été étudiées déjà par la géométrie projective, et les recherches qui s'y rattachent sont éparpillées dans divers périodiques. Il y a intérêt à les grouper dans une étude d'ensemble et à voir de quelles généralisations elles sont susceptibles.

La courbe Jacobienne d'un système de surfaces a sa place marquée dans cette partie de notre travail; nous espérons pouvoir ajouter quelque chose à ce que l'on en sait.

Mais le vrai but de cette étude est de montrer quels procédés d'élimination donnent naissance à des matrices et quel usage on peut faire de cette théorie pour la détermination des éléments singuliers des lieux géométriques et des enveloppes. Nous ajoutons là quelques autres applications.

Il est trop évident que ces considérations s'appliquent à des espaces quelconques et, par suite, à l'espace ordinaire réglé. Si, dans la plus grande partie du travail, nous nous limitons à trois dimensions, c'est pour la commodité de la rédaction. Toutefois, afin de montrer que cette limitation n'est pas nécessaire, nous dirons quelques mots de l'espace à quatre dimensions, ainsi que des congruences et complexes de droites.

Enfin les éléments d'une matrice peuvent être des formes à deux ou plusieurs séries de variables, et l'application de cette idée à un cas particulier fournit les bases d'une théorie des congruences de courbes gauches, notamment des cubiques; cette théorie, on le sait, est encore à faire; ceci fera l'objet de notre *Étude II.*

Pour répondre au reproche de n'avoir pas épuisé les sujets traités, nous nous permettons de déclarer ici que nous voulons attirer l'attention, non sur ces sujets eux-mêmes, mais sur la méthode employée.

Généralités sur les matrices.

1. Une matrice rectangulaire ayant, par exemple, trois lignes et quatre colonnes,

$$M \equiv \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \right\|$$

représente les quatre déterminants $(a_1b_2c_3)$, $(a_1b_2c_4)$, $(a_1b_3c_4)$, $(a_2b_3c_4)$; nous écrirons souvent en abrégé

$$M \equiv \| a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \|_1^3 \equiv \| a_i\ b_i\ c_i \|_1^4.$$

L'égalité $M = 0$ exprime qu'il existe une même relation linéaire entre les éléments de chaque colonne, et une seule lorsque les déterminants à quatre éléments extraits de la matrice ne sont pas tous nuls. Elle exprime aussi qu'il existe un *faisceau* de relations linéaires entre les éléments de chaque ligne.

Quand $M = 0$, les quatre déterminants $(a_1b_2c_3)$, $(a_1b_2c_4)$, $(a_1b_3c_4)$, $(a_2b_3c_4)$ sont nuls. Par suite, dans la matrice M, les mineurs formés avec les couples d'éléments de deux lignes (ou colonnes) sont proportionnels aux mineurs formés des éléments correspondants de deux autres lignes (ou colonnes) quelconques.

Si deux des quatre déterminants, par exemple $(a_1b_2c_3)$ et $(a_1b_2c_4)$, sont nuls, il existe une même relation linéaire entre les éléments des colonnes 1, 2, 3; une même relation linéaire entre les éléments des colonnes 1, 2, 4; donc, ou bien une même relation linéaire entre les éléments des quatre colonnes, et alors $M = 0$, ou bien plus d'une relation linéaire entre les éléments des colonnes 1 et 2, et alors on a

$$m \equiv \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right\| = 0.$$

Par conséquent, le système

$$(a_1 b_2 c_3) = 0, \quad (a_1 b_2 c_4) = 0$$

équivaut en général à

$$\mathrm{M}m = 0.$$

La propriété analogue appartient à toute matrice de l lignes et $l + 1$ colonnes.

2. Si les éléments de M sont des formes linéaires ternaires, chacune des équations $(a_1 b_2 c_3) = 0$, $(a_1 b_2 c_4) = 0$ est du troisième degré. Elles ont donc neuf systèmes de solutions communes dont une partie, μ_3 par exemple, annulent M, et les autres, en nombre μ_2, annulent m. On a donc

$$\mu_3 = 3^2 - \mu_2;$$

pareillement

$$\mu_2 = 2^2 - \mu_1,$$

et comme, visiblement, $\mu_1 = 1$, on a

$$\mu_3 = 3^2 - 2^2 + 1^2 = 6.$$

De même, on trouve en général

$$\mu_l = l^2 - (l-1)^2 + (l-2)^2 - \cdots \pm 1 = \frac{l(l+1)}{2}.$$

Ainsi *une matrice à* l *lignes et* $l + 1$ *colonnes de formes linéaires ternaires s'annule pour* $\frac{l(l+1)}{2}$ *points.*

Dans certains cas particuliers, ce résultat peut être altéré. Par exemple, s'il existe des relations identiques entre certains éléments de M, il peut arriver que cette matrice s'annule pour une infinité de points. La même chose peut se présenter pour la matrice partielle m, dont l'évanouissement représente parfois une conique, ou une droite accompagnée d'un nombre fini de points. Cette dernière circonstance n'empêche pas nécessairement M de

représenter un nombre fini de points; mais le raisonnement ci-dessus est alors en défaut. La difficulté est levée s'il existe, dans le tableau M, un tableau partiel, autre que m, formé de deux colonnes et s'annulant pour un nombre fini de points. Cependant, s'il n'existe pas de tableau partiel pareil, ou si l'on désire utiliser la matrice particulière $m \equiv \| a_1 \; a_2 \|_1^5$, on peut raisonner comme il suit.

Supposons que m s'annule pour les points d'une courbe c; le raisonnement précédent fait connaître les points annulant M et non m, donc les points non situés sur la courbe c. On obtient ensuite les points annulant M et situés sur cette courbe c en cherchant les intersections de celle-ci avec la courbe $(a_1 b_3 c_4) = 0$ par exemple, et en défalquant, s'il y a lieu, les points annulant à la fois a_1, a_2, a_3. Pratiquement, on est en possession d'un procédé régressif général, et la suite montrera, encore mieux, que les applications de ce procédé ne présentent guère de difficulté.

Ce qu'il importe de remarquer, et ce que nous établirons ici, une fois pour toutes, c'est que si M s'annule pour un nombre fini de points, ce nombre reste le même quelles que soient les hypothèses que l'on peut faire sur les matrices partielles m. L'exactitude de cette proposition est presque évidente, en raison de la continuité ou, si l'on veut, en vertu du *principe de la conservation du nombre* de Schubert.

On peut énoncer ledit principe de la manière suivante : *Si* N *individus d'un système géométrique satisfont à un ensemble de conditions, et si l'on modifie ou que l'on spécialise la situation respective des éléments du système, le nombre* N *demeure inaltéré ou devient infini.* C'est au fond la traduction du fait algébrique que voici : une équation, dont les coefficients subissent des modifications, conserve le même nombre de racines ou devient une identité.

En ces derniers temps, le principe de Schubert a été fort combattu. Au congrès de Heidelberg notamment, il a fait l'objet d'une discussion mouvementée. Dans l'application, toutes les objections tombent nécessairement, si l'on peut écrire cette équation algébrique dont le nombre des racines est N.

Supposons donc qu'une matrice M ayant, pour fixer les idées, trois lignes et quatre colonnes de formes linéaires ternaires, s'annule pour un nombre fini μ de points, bien que chacune des matrices partielles m s'annule pour une infinité de points (peu importe que ces faits soient compatibles ou non). Par des modifications apportées à certains coefficients, on obtient une matrice M' de même structure et dont certaines matrices partielles m' s'annulent seulement pour un nombre fini de points; nous savons que $M' = 0$ représente $\mu_3 = 6$ points.

Admettons que les éléments a_i, b_i, c_i de la matrice M soient de la forme $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$, ...; que ce système soit rapporté à un triangle de référence dont aucun sommet ne coïncide ni avec un point de M ni avec un point de M'; enfin, que nous cherchions les droites qui joignent les μ points de M au sommet x_1x_2 du triangle fondamental. Nous avons à éliminer x_3 de $M = 0$, ou, ce qui revient au même, à éliminer $\alpha, \beta, \gamma, x_3$ des relations

$$\alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i \equiv \alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2) + \beta(b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2)$$
$$+ \gamma(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2) + \alpha x_3 a_{i3} + \beta x_3 b_{i3} + \gamma x_3 c_{i3} = 0 \quad (i = 1,2,3,4).$$

En multipliant ces quatre relations, d'abord par x_3, puis par x_3^2, on a douze égalités homogènes et linéaires en

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha x_3,\ \beta x_3,\ \gamma x_3,\ \alpha x_3^2,\ \beta x_3^2,\ \gamma x_3^2,\ \alpha x_3^3,\ \beta x_3^3,\ \gamma x_3^3.$$

On élimine ces douze variables et l'on a un déterminant qui s'annule pour les μ valeurs de $x_1 : x_2$ répondant aux points de M. Or, des modifications à certains coefficients changent cette équation en une autre qui a, nous le savons, $\mu_3 = 6$ racines. Donc $\mu = 6$ ou $\mu = \infty$; mais, par hypothèse, μ n'est pas infini, par conséquent le théorème est démontré.

3. Si les éléments d'une matrice M à l lignes et $l + 1$ colonnes sont des formes linéaires quaternaires, la matrice s'annule, en général, pour les points d'une courbe gauche d'ordre $\frac{l(l+1)}{2}$.

Exceptionnellement, ces points peuvent engendrer une surface, accompagnée ou non d'une courbe gauche.

Si les éléments de M sont, les uns des constantes, les autres des formes quaternaires de degré quelconque, la matrice peut encore représenter une courbe gauche, notamment quand les éléments de chaque ligne ou de chaque colonne sont du même degré et, en général, quand les déterminants obtenus par la suppression d'une colonne sont des fonctions homogènes. On s'assure sans peine que ceci a lieu quand un élément de la matrice est de l'ordre $n_i + p_k$, p_k conservant la même valeur pour tous les éléments d'une même colonne et n_i demeurant inaltéré dans toute l'étendue d'une ligne.

Quand la matrice M s'annule pour les points d'une courbe gauche, les explications du n° 2 donnent le moyen de calculer l'ordre de cette courbe dans chaque cas particulier, et aussi de déterminer une formule générale. Il est d'ailleurs évident que la courbe peut se décomposer en plusieurs autres; en pareil cas, on obtient l'ordre total.

Pour établir la formule générale, il est utile d'employer la notation à deux indices

$$\mathrm{M} \equiv \| a_{ik} \|,$$

a_{ik} étant une forme de l'ordre $n_i + p_k$. Pour commencer, nous ferons prendre à i les valeurs 1, 2, 3 et à k les valeurs 1, 2, 3, 4. Soient μ l'ordre de la courbe M, μ' celui de la courbe annulant la matrice

$$m \equiv \| a_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$

et μ'' celui de la courbe annulant a_{11} et a_{12}; c'est-à-dire que l'on considère les matrices extraites de M, d'abord en supprimant les deux dernières colonnes, puis en effaçant, dans le résultat, les deux dernières lignes. Les courbes d'ordres μ et μ' forment l'intersection totale de deux surfaces annulant les déterminants

$$| a_{ik} | \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3)$$

$$| a_{ik} | \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 4)$$

obtenus en supprimant, dans M, la dernière ou l'avant-dernière colonne. Les ordres de ces surfaces sont respectivement

$$n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + n_3 + p_3 \quad \text{ou} \quad \Sigma n + \Sigma p - p_4,$$
$$n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + n_3 + p_4 \quad \text{ou} \quad \Sigma n + \Sigma p - p_3.$$

On a donc

$$\mu + \mu' = (\Sigma n + \Sigma p - p_3)(\Sigma n + \Sigma p - p_4),$$

pareillement

$$\mu' + \mu'' = (\Sigma n + \Sigma p - n_2 - p_3 - p_4)(\Sigma n + \Sigma p - n_3 - p_3 - p_4),$$

et évidemment

$$\mu'' = (n_1 + p_1)(n_1 + p_2).$$

Ces trois égalités donnent, en additionnant la première avec la dernière et en soustrayant la seconde,

$$\mu = (\Sigma n + \Sigma p)(n_2 + n_3 + p_3 + p_4) - n_2 n_3 + n_1^2 + (n_2 + n_3)(p_3 + p_4) + n_1(p_1 + p_2) - p_3^2 - p_4^2 - p_3 p_4 + p_1 p_2.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$\mu = \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n^2 + \Sigma n \Sigma p + \Sigma p_1 p_2.$$

Si l'on prend ensuite la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|,$$

on trouve immédiatement, pour l'ordre de la courbe représentée,

$$\mu = (n_1 + n_2 + p_1 + p_2)(n_1 + n_2 + p_1 + p_3) - (n_1 + p_1)(n_2 + p_1),$$

résultat conforme à la formule précédente.

Pour établir que cette formule est générale, nous la supposons démontrée pour une matrice à l lignes et $l + 1$ colonnes et

nous adjoignons deux lignes de formes d'ordres $N + p_k$ et $N' + p_k (k = 1, 2, \ldots, l + 1)$. Soient μ_1 l'ordre de la courbe annulant cette nouvelle matrice et μ l'ordre correspondant à la matrice initiale à l lignes et $l + 1$ colonnes.

On aura, comme plus haut,

$$\mu_1 + \mu = (\Sigma n + \Sigma p + N)(\Sigma n + \Sigma p + N'),$$
$$\mu = \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n^2 + \Sigma p \,.\, \Sigma n + \Sigma p_1 p_2,$$

d'où

$$\mu_1 = (\Sigma n + \Sigma p + N)(\Sigma n + \Sigma p + N') - \Sigma n_1 n_2 - \Sigma n^2 - \Sigma p \Sigma n - \Sigma p_1 p_2,$$

et, après quelques calculs,

$$\mu_1 = \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p^2 + \Sigma p(\Sigma n + N + N') + \Sigma n_1 n_2 + (N + N')\Sigma n + NN',$$

résultat conforme à la formule qui donne μ, sauf, comme on devait le prévoir, que les rôles des p et des n sont intervertis.

Donc *une matrice à* l *lignes et* $l + 1$ *colonnes de formes quaternaires, dont chaque élément* a_{ik} *est de l'ordre* $n_i + p_k$, *s'annule pour les points d'une courbe gauche ou d'un système de courbes dont l'ordre total est*

$$\Sigma n_1 n_2 + \Sigma n^2 + \Sigma n \Sigma p + \Sigma p_1 p_2.$$

4. On pourrait trouver le nombre des points doubles apparents, et, par suite, le *genre* de la courbe $\overset{3}{1} \| a_{ik} \| \overset{4}{1} = 0$, où a_{ik} est une forme quaternaire de l'ordre $n_i + p_k$ en n'utilisant que les procédés d'élimination qui seront exposés dans ce travail. Mais, pour ne pas intervertir l'ordre des matières, nous préférons utiliser la formule connue donnant le nombre h de points doubles apparents d'une courbe intersection partielle de deux surfaces (*)

$$2h - 2h' = (\Sigma n + \Sigma p - p_4 - 1)(\Sigma n + \Sigma p - p_5 - 1)(\mu - \mu^1).$$

(*) Voir Salmon, *Géom. anal. à* 3 *dim.*

Dans cette formule, μ est l'ordre de la courbe considérée, $\Sigma n + \Sigma p - p_4$ et $\Sigma n + \Sigma p - p_3$ sont les ordres des deux surfaces, μ' et h' désignent respectivement l'ordre et le nombre de points doubles apparents de la courbe complétant l'intersection. En vertu du n° 3, cette relation peut encore s'écrire

$$2h - 2h' = \mu^2 - \mu'^2 + \mu - \mu' - (\mu - \mu')(2\Sigma n + 2\Sigma p - p_3 - p_4).$$

Le procédé régressif donne de même

$$2h' - 2h'' = \mu'^2 - \mu''^2 + \mu' - \mu'' - (\mu' - \mu'')(2\Sigma n + 2\Sigma p - n_2 - n_3 - 2p_3 - 2p_4),$$

et comme la courbe d'ordre μ'' est l'intersection totale de deux surfaces, on a

$$2h'' = (n_1 + p_1 - 1)(n_1 + p_2 - 1)\mu'' = \mu''^2 + \mu'' - \mu''(p_1 + p_2 + 2n_1).$$

Additionnons ces trois égalités ; il vient

$$2h = \mu^2 + \mu - 2\mu(\Sigma n + \Sigma p) + (\mu + \mu')(p_3 + p_4) + (\mu' + \mu'')(n_2 + n_3) + \mu''(p_1 + p_2).$$

Le numéro précédent contient les valeurs de $\mu + \mu'$ et de $\mu' + \mu''$; en les introduisant, on a successivement

$$2h = \mu^2 + \mu - 2\mu(\Sigma n + \Sigma p) + (\Sigma n + \Sigma p - p_4)(\Sigma n + \Sigma p - p_3)(p_3 + p_4) + (\Sigma n + \Sigma p - n_3 - p_3 - p_4)(\Sigma n + \Sigma p - n_2 - p_3 - p_4)(n_2 + n_3) + (n_1 + p_1)(n_1 + p_2)(p_1 + p_2),$$

$$2h = \mu^2 + \mu - 2\mu(\Sigma n + \Sigma p) + (\Sigma n)^2(n_2 + n_3) - \Sigma n(n_2 + n_3)^2 + n_2 n_3(n_2 + n_3) + (\Sigma n)^2(p_3 + p_4) + (n_2 + n_3)(2n_1 + n_2 + n_3)(p_1 + p_2) + n_1^2(p_1 + p_2) + \Sigma n(p_3 + p_4)(2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4) + (n_2 + n_3)(p_1 + p_2)^2 + n_1(p_1 + p_2)^2 + (p_3 + p_4)(p_1 + p_2 + p_3)(p_1 + p_2 + p_4) + p_1 p_2(p_1 + p_2),$$

ou enfin

$$2h = \mu^2 + \mu - 2\mu(\Sigma n + \Sigma p) + \Sigma n_1^2 n_2 + 2n_1 n_2 n_3 + (\Sigma n)^2 \Sigma p + \Sigma n (\Sigma p)^2 + \Sigma p_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 p_3.$$

Pour une matrice à deux lignes et trois colonnes, un calcul analogue mais beaucoup plus simple conduit à la même formule, privée toutefois du terme $2n_1n_2n_3$, ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'il n'y a plus que deux quantités n_1 et n_2. On peut conjecturer que la formule générale contient, au lieu du terme $2n_1n_2n_3$, le terme analogue $2\Sigma n_1 n_2 n_3$.

Supposons en effet cette formule établie pour une courbe d'ordre μ annulant une matrice $\| a_{ik} \|$ à l lignes et $l+1$ colonnes. Comme au numéro 3, ajoutons deux lignes N et N′; appelons μ_1 l'ordre de la courbe représentée par cette nouvelle matrice et H le nombre de ses points doubles apparents; μ et h les mêmes quantités pour la matrice initiale. On a alors, comme ci-dessus, les formules

$$2\mathrm{H} - 2h = \mu_1^2 - \mu^2 + \mu_1 - \mu - (\mu_1 - \mu)(2\Sigma n + 2\Sigma p + \mathrm{N} + \mathrm{N}'),$$

$$2h = \mu^2 + \mu - 2\mu(\Sigma n + \Sigma p) + \Sigma n_1^2 n_2 + 2\Sigma n_1 n_2 n_3 + (\Sigma n)^2 \Sigma p + \Sigma n (\Sigma p)^2 + \Sigma p_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 p_3,$$

cette dernière par hypothèse. L'addition donne

$$2\mathrm{H} = \mu_1^2 + \mu_1 - 2\mu_1(\Sigma n + \mathrm{N} + \mathrm{N}' + \Sigma p) + (\mathrm{N} + \mathrm{N}')(\mu_1 + \mu) + \Sigma n_1^2 n_2 + 2\Sigma n_1 n_2 n_3 + (\Sigma n)^2 \Sigma p + \Sigma n (\Sigma p)^2 + \Sigma p_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 p_3,$$

et puisque

$$\mu_1 + \mu = (\Sigma n + \Sigma p + \mathrm{N})(\Sigma n + \Sigma p + \mathrm{N}'),$$

on a

$$\begin{aligned}2H = {} & \mu_1^2 + \mu_1 - 2\mu_1(\Sigma n + N + N' + \Sigma p) \\ & + \Sigma n_1^2 n_2 + (N^2 + N'^2)\Sigma n + (N + N')\Sigma n^2 \\ & + 2\Sigma n_1 n_2 n_3 + 2NN'\Sigma n + 2(N + N')\Sigma n_1 n_2 \\ & + (\Sigma n)^2 \Sigma p + \Sigma p(2\Sigma n + N + N')(N + N') \\ & + \Sigma n(\Sigma p)^2 + (N + N')(\Sigma p)^2 \\ & + \Sigma p_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 p_3 .\end{aligned}$$

La formule générale est ainsi démontrée.

Le genre g d'une courbe d'ordre μ douée de h points doubles apparents est

$$g = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} - h = \frac{\mu^2 - 3\mu + 2}{2} - h.$$

On en conclut la formule suivante pour le genre d'une courbe gauche annulant une matrice à l lignes et $l + 1$ colonnes d'éléments d'ordre $n_i + p_k$:

$$\begin{aligned}g = 1 + \mu(\Sigma n + \Sigma p - 2) - \tfrac{1}{2}[& \Sigma n_1^2 n_2 + 2\Sigma n_1 n_2 n_3 + (\Sigma n)^2 \Sigma p \\ & + \Sigma n(\Sigma p)^2 + \Sigma p_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 p_3].\end{aligned}$$

5. Revenons à la matrice à trois lignes et quatre colonnes de formes quaternaires du premier degré

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\|.$$

Il est utile de savoir le nombre μ_{23} des systèmes de valeurs des variables qui annulent à la fois M et la matrice m formée par les deux premières colonnes de M.

Pour un système de valeurs des variables qui annulent m, les fonctions a_1, b_1, c_1 et les fonctions a_2, b_2, c_2 ont un faisceau de relations linéaires communes ; si, pour ces valeurs des variables,

une de ces relations linéaires appartient aussi aux formes a_3, b_3, c_3, ainsi qu'à a_4, b_4, c_4, c'est-à-dire si M est nulle, le déterminant $(a_1\, b_3\, c_4)$ est égal à zéro.

Réciproquement, si l'on a $(a_1\, b_3\, c_4) = 0$ et $m = 0$, les éléments des quatre colonnes ont une même relation linéaire, à moins que l'on n'ait $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, ce qui n'arrive, en général, que pour un système des valeurs des variables, de sorte que l'on a

$$\mu_{23} = 3\mu_2 - 1 = 8.$$

On trouve, par le même raisonnement,

$$\mu_{34} = 4\mu_3 - \nu_2,$$

ν_2 étant le nombre de systèmes qui annulent une matrice à deux lignes et quatre colonnes de formes linéaires. Et généralement,

$$\mu_{l(l+1)} = (l+1)\mu_l - \nu_{l-1}.$$

Il faut donc considérer à présent une matrice ayant deux colonnes de plus que de lignes, par exemple,

$$N \equiv \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{matrix} \right\|.$$

Lorsqu'elle est nulle, tous les déterminants obtenus en prenant trois des cinq colonnes s'évanouissent; par suite,

$$M \equiv \| 1\ 2\ 3\ 4 \| = 0 \quad \text{et} \quad D \equiv | 1\ 2\ 5 | = 0.$$

Inversement, si l'on a ces deux dernières relations, les éléments des cinq colonnes de N ont une même relation linéaire, à moins que l'on n'ait $m \equiv \| 1\ 2 \| = 0$. Le système $M = 0$, $D = 0$ admet $3\mu_3$ systèmes de racines, dont ν_3 annulent N et les autres annulent m et M; le nombre de ces derniers est donc μ_{23};

il est d'ailleurs évident que tous ceux qui annulent m annulent D. Ainsi

$$\nu_3 = 3\mu_3 - \mu_{23},$$

et généralement

$$\nu_{l-1} = (l-1)\mu_{l-1} - \mu_{(l-2)(l-1)}.$$

Substituons dans la formule trouvée précédemment $\mu_{l(l+1)}$; il vient

$$\mu_{l(l+1)} = (l+1)\mu_l - (l-1)\mu_{l-1} + \mu_{(l-2)(l-1)},$$

ou

$$\mu_{l(l+1)} = 2l^2 + \mu_{(l-2)(l-1)}.$$

Cette formule de réduction donne

$$\mu_{l(l+1)} = 2[l^2 + (l-2)^2 + (l-4)^2 + \ldots] = \frac{l(l+1)(l+2)}{3}.$$

On trouve, par la même méthode,

$$\nu_l = l^2 + \nu_{l-1},$$

d'où

$$\nu_l = l^2 + (l-2)^2 + (l-4)^2 + \ldots = \frac{l(l+1)(l+2)}{6}.$$

Si les éléments des matrices sont des formes de degré quelconque, on peut, dans chaque cas particulier, refaire le raisonnement ci-dessus et trouver les nombres analogues à $\mu_{l(l+1)}$ et ν_l.

Pour l'établissement d'une formule générale, il y a avantage à commencer par les nombres ν_l. Nous allons démontrer qu'une matrice $\| a_{ik} \|$ à l lignes et $l+2$ colonnes de formes de degré $n_i + p_k$ ($i = 1, 2, \ldots l$; $k = 1, 2, \ldots, l+2$) s'annule pour un nombre de points donné par la relation

$$\nu_l = \Sigma n^3 + \Sigma n_1^2 n_2 + \Sigma n_1 n_2 n_3 + \Sigma p(\Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2) + \Sigma p_1 p_2 \Sigma n + \Sigma p_1 p_2 p_3;$$

les deux premiers termes du second membre peuvent évidemment être remplacés par l'expression équivalente $\Sigma n \Sigma n^2$.

D'abord cette formule se vérifie sur une matrice à une ligne et trois colonnes, car un tel tableau s'annule pour les points communs à trois surfaces et le nombre de ces points est

$$(n_1 + p_1)(n_1 + p_2)(n_1 + p_3) \equiv n_1^3 + n_1^2 \Sigma p + n_1 \Sigma p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3.$$

Ensuite la même formule s'applique à une matrice à deux lignes et quatre colonnes, car on peut chercher le nombre des points qui l'annulent par la méthode exposée ci-dessus pour les matrices composées de formes linéaires, et l'on trouve

$$\nu_2 = (n_1+n_2+p_1+p_4)[(n_1+n_2+p_1+p_2)(n_1+n_2+p_1+p_3) - (n_1+p_1)(n_2+p_2)] - (n_1 + p_1)(n_2 + p_1)(n_1 + n_2 + p_2 + p_3).$$

En ordonnant par rapport aux n, on trouve cette expression conforme à la formule annoncée.

Enfin on suppose cette formule établie pour une matrice N à l lignes et $l + 2$ colonnes et l'on y joint quatre lignes de formes de degrés $N_1 + p_k$, $N_2 + p_k$, $N_3 + p_k$, $N_4 + p_k$; soit ν_{l+2} le nombre de points qui annulent cette nouvelle matrice N′ à $l+2$ colonnes et $l+4$ lignes. Ces points sont ceux qui annulent le déterminant constitué par la dernière ligne et les $l+1$ premières de N′ et qui annulent aussi la matrice des $l+3$ premières lignes ; d'où il faut défalquer les $\mu_{\lambda(l+1)}$ points communs à cette dernière matrice et à celle de ses $l + 1$ premières lignes. On a

$$\nu_{l+2} = (\Sigma n + N_1 + N_4 + \Sigma p)[\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p(\Sigma n + N_1 + N_2 + N_3) + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n(N_1 + N_2 + N_3) + N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2] - \mu_{\lambda(l+1)}.$$

La quantité entre crochets est l'ordre de la courbe annulant la matrice des $l + 3$ premières lignes de N′ ; cet ordre a été trouvé au numéro 2, mais il a fallu intervertir les rôles des lettres p et n, puisque la matrice considérée ici a plus de lignes que de colonnes.

Quant aux points en nombre $\mu_{l(l+1)}$, ce sont les points communs à la matrice des $l+1$ lignes et au déterminant formé des l premières lignes complétées par les lignes N_2 et N_3 ; mais il faut défalquer les ν_l points annulant la matrice initiale N. Donc

$$\mu_{l(l+1)} = (\Sigma n + N_2 + N_3 + \Sigma p)$$
$$(\Sigma n^2 + N_1^2 + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n \Sigma p + N_1 \Sigma p + \Sigma p_1 p_2) - \nu_l,$$

et comme ν_l, par hypothèse, est donné par la formule à établir, on a

$$\begin{aligned}\nu_{l+2} = {} & (\Sigma n + N_1 + N_4 + \Sigma p)\,[\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p(\Sigma n + N_1 + N_2 + N_3) \\ & + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n(N_1 + N_2 + N_3) + N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2] \\ & - (\Sigma n + N_2 + N_3 + \Sigma p)\,(\Sigma n^2 + N_1^2 + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n \Sigma p \\ & + N_1 \Sigma p + \Sigma p_1 p_2) + \Sigma n \Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2 n_3 + \Sigma p(\Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2) \\ & + \Sigma p_1 p_2 \Sigma n + \Sigma p_1 p_2 p_3.\end{aligned}$$

Ordonnons par rapport aux p : il vient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}\nu_{l+2} = {} & \Sigma p \Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 p_3 + (\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2)\,(\Sigma n + N_1 + N_4) \\ & + [(\Sigma p)^2 - \Sigma p_1 p_2]\,(N_2 + N_3) + \Sigma p[\Sigma n_1 n_2 + (N_1 + N_2 + N_3)\Sigma n \\ & + N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 + N_4(\Sigma n + N_1 + N_2 + N_3)] \\ & + (\Sigma n + N_1 + N_4)\,[\Sigma n_1 n_2 + (N_1 + N_2 + N_3)\Sigma n + N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2] \\ & - (\Sigma n + N_2 + N_3)\,(\Sigma n^2 + N_1^2 + \Sigma n_1 n_2 + N_1 \Sigma n) + \Sigma n \Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2 n_3,\end{aligned}$$

ce qui, tous calculs faits, est conforme à la formule annoncée, sauf naturellement que les rôles des lettres p et n sont intervertis.

Nous pouvons maintenant aussi donner une formule générale pour le nombre $\mu_{l(l+1)}$ des points qui annulent à la fois une matrice M à l lignes et $l+1$ colonnes de formes d'ordre $n_i + p_k$ et la même matrice suivie de deux lignes de formes d'ordres $N_1 + p_k$, $N_2 + p_k$. Ces points sont ceux qui annulent à la fois M et le déterminant formé des $l-1$ premières lignes et des lignes N_1 et

N_2; d'où il faut défalquer les ν_{l-1} points qui annulent la matrice des $l-1$ premières lignes de M. Donc

$$\mu_{l(l+1)} = \mu_l(\Sigma n - n_l + N_1 + N_2 + \Sigma p) - \nu_{l-1}$$
$$= (\Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n \Sigma p + \Sigma p_1 p_2)(\Sigma n - n_l + N_1 + N_2 + \Sigma p)$$
$$- \sum_1^{l-1} \Sigma n_1 n_2 n_3 - \sum_1^{l-1} \Sigma n^2 \sum_1^{l-1} \Sigma n - \Sigma p(\sum_1^{l-1} \Sigma n^2 + \sum_1^{l-1} \Sigma n_1 n_2) - \Sigma p_1 p_2 \sum_1^{l-1} \Sigma n - \Sigma p_1 p_2 p_3.$$

Tous calculs faits, on écrit cette formule sous la forme symétrique

$$\mu_{l(l+1)} = \Sigma n \Sigma n_1 n_2 - \Sigma n_1 n_2 n_3 + \Sigma p(\Sigma n)^2 + \Sigma n(\Sigma p)^2 + \Sigma p \Sigma p_1 p_2 - \Sigma p_1 p_2 p_3$$
$$+ (N_1 + N_2)(\Sigma n^2 + \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n \Sigma p + \Sigma p_1 p_2).$$

6. En résumé, l'étude d'une matrice se ramène toujours à l'étude de tableaux analogues obtenus par suppression d'un certain nombre de lignes et de colonnes. Il va de soi que l'on peut aussi procéder par adjonction de lignes ou de colonnes d'éléments quelconques, comme nous le montrerons plus tard.

Les quelques questions traitées ci-dessus ne sont pas les seules que l'on peut résoudre. Nous allons voir, par une couple d'exemples, que, moyennant des modifications de détail, les procédés restent les mêmes dans l'ensemble.

Soit la matrice d'éléments quaternaires quelconques

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\|.$$

Elle s'annule pour les points d'une courbe gauche située notamment sur la surface qui annule le déterminant (1 2 3). Mais la matrice partielle

$$N \equiv \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\|$$

représente une autre courbe située sur la même surface. Cher-

chons les points communs à ces deux courbes. Les coordonnées d'un point x qui annule le dernier tableau rendent compatibles en λ et μ les relations

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Donc les relations

$$\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont satisfaites pour les coordonnées de ce point x, ainsi que pour les mêmes valeurs de λ et μ. et pour $\nu = 0$. Le point x, s'il ne rend pas nuls tous les premiers mineurs du déterminant (1 2 3), satisfait aux dernières équations en même temps qu'un seul système de valeur de λ, μ, ν, [la valeur de ν est 0]. Si donc ce point appartient aussi à la courbe M, il satisfait en outre à l'équation suivante

$$\lambda a_4 + \mu b_4 + 0 c_4 = 0,$$

et par suite il annule la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right\|.$$

Ainsi ce dernier tableau représente tous les points communs aux courbes M et N.

Il faudrait, d'après ce qui précède, écarter les points x qui annulent tous les premiers mineurs du déterminant (1 2 3). Or ceci équivaut à quatre conditions en x_1, x_2, x_3, x_4, conditions généralement incompatibles ; donc il n'y a aucun point à défalquer (*).

(*) Comp. Giambelli, *loc. cit.*, p. 105.

La question précédente trouve son application dans la théorie des *matrices angulaires* (*) : représentons par la notation

$$\left|\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3 \end{array}\right| = 0$$

l'ensemble des points qui annulent tous les déterminants formés en prenant trois des lignes λ_i, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ou trois des colonnes a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, α_k. On peut trouver le nombre de ces points, car ce sont les intersections de deux courbes

$$\| \lambda_i \quad a_{1i} \quad a_{2i} \quad a_{3i} \| = 0, \quad \| a_{k1} \quad a_{k2} \quad a_{k3} \quad \alpha_k \| = 0,$$

tracées toutes deux sur la surface $| a_{11} a_{22} a_{33} | = 0$. On cherche les points où la première de ces courbes coupe la surface $| a_{k1} a_{k2} \alpha_k | = 0$ et l'on en défalque les points communs à cette même première courbe et à la courbe

$$\| a_{k1} \quad a_{k2} \|_1^3 = 0;$$

ces derniers points se trouvent par le raisonnement ci-dessus.

7. Une matrice à l lignes et $l + 2$ colonnes de formes quelconques représente en général un nombre fini ν de points. Exceptionnellement, elle s'annule pour les points d'une courbe ou même d'une surface. De même la matrice

$$M \equiv \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\|$$

dont l'élément a_{ik} est d'ordre $n_i + p_k$ peut s'annuler pour les

(*) Giambelli, *loc. cit.*, p. 105.

points d'une surface S_λ d'ordre λ, accompagnée d'une courbe d'ordre $\nu (\nu \geqslant 0)$.

Disons un mot de ce cas et appelons μ l'ordre de M quand, étant formée d'éléments autres, mais de même ordre $n_i + p_k$, elle ne représente qu'une courbe gauche.

Les équations suivantes

$$\left| \begin{matrix} b_{0k} & a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \end{matrix} \right| = 0, \quad \left| \begin{matrix} c_{0k} & a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \end{matrix} \right| = 0$$

représentent deux surfaces; si les formes b_{0k} et c_{0k} sont d'ordre p_k, ces deux surfaces sont chacune de degré $n_1 + n_2 + n_3 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ou $\Sigma n + \Sigma p$. Chacune d'elles se décompose en la surface S_λ et une autre surface d'ordre $\Sigma n + \Sigma p - \lambda$; appelons ces dernières $S_{\Sigma n+\Sigma p-\lambda}$ et $S'_{\Sigma n+\Sigma p-\lambda}$. De là résulte d'abord que $\lambda \leqslant \Sigma n + \Sigma p$. Supposons que l'on puisse choisir les formes b_{0k} et c_{0k} de manière que ces deux surfaces résidues n'aient en commun qu'une courbe ou un système de courbes; il est clair que généralement cela est possible d'une infinité de manières.

Considérons alors la matrice

$$N \equiv \left\| \begin{matrix} b_{0k} & c_{0k} & a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \end{matrix} \right\|.$$

D'après le n° 2, pour trouver les points qui l'annulent, il faut chercher d'abord la partie de l'intersection des deux surfaces d'ordre $\Sigma n + \Sigma p$ qui n'annule pas M; cette partie est l'intersection totale des surfaces $S_{\Sigma n+\Sigma p-\lambda}$ et $S'_{\Sigma n+\Sigma p-\lambda}$, d'où l'on a défalqué la courbe d'ordre ν annulant M. Ensuite il faut chercher les points qui annulent à la fois S_λ (donc M) et N et, pour cela, chercher l'intersection de S_λ avec la surface $|b_{0k}c_{0k}a_{1k}a_{2k}| = 0$ et en défalquer, s'il y a lieu, la courbe gauche d'ordre π_3 qui pourrait annuler la matrice $\| a_{1k}\, a_{2k} \|_1^4$. Finalement N s'annule pour une courbe gauche d'ordre

$$(\Sigma n + \Sigma p - \lambda)^2 - \nu + \lambda(\Sigma n + \Sigma p - n_3) - \pi_3.$$

Mais, d'après la remarque qui termine le n° 2, on peut calculer

l'ordre de la courbe **N** comme si la matrice **M** s'annulait seulement pour une courbe gauche d'ordre μ, et l'on a donc

$$(\Sigma n + \Sigma p - \lambda)^2 - \nu + \lambda(\Sigma n + \Sigma p - n_3) - \pi_3 = (\Sigma n + \Sigma p)^2 - \mu,$$

d'où

$$\pi_3 = \lambda^2 - \lambda(\Sigma n + \Sigma p + n_3) + \mu - \nu.$$

On trouve des valeurs analogues pour π_2 et π_1 et, comme ces quantités sont positives ou nulles, il en résulte que $\mu - \nu$ est au moins égal à la plus grande des quantités

$$\lambda(\Sigma n + \Sigma p + n_i - \lambda).$$

De plus, quand les nombres n_i sont différents, il y a au moins une des quantités π_i qui est différente de zéro, c'est-à-dire au moins une des matrices partielles, à deux lignes et quatre colonnes, extraites de **M**, qui s'annule pour une infinité de points.

La cubique gauche.

8. Dans le chapitre III de notre *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre* (Gand, Hoste, et Paris, Gauthier-Villars, 1902), nous avons étudié une gerbe de cubiques gauches au moyen d'une notation qui équivaut à ce qui suit :

Si a_x, b_x,... *représentent des formes linéaires quaternaires quelconques, les relations*

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent la cubique gauche la plus générale.

Le système de ses bisécantes est donné par les équations

$$\begin{cases} \lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x = 0, \\ \lambda a'_x + \mu b'_x + \nu c'_x = 0. \end{cases}$$

Si l'on fait précéder la matrice d'une ligne de constantes arbitraires, α, β, γ, on a l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0$$

du réseau des quadriques circonscrites à la courbe.

L'arrangement en colonnes et en lignes de la matrice donnée correspond aux deux modes de génération de la courbe, comme lieu des intersections des plans homologues de trois faisceaux projectifs et comme lieu des intersections des rayons homologues de deux gerbes projectives. Les équations des bisécantes montrent que ces droites sont les intersections des plans homologues de ces deux gerbes.

9. L'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\|,$$

où a, b, c, d sont des constantes et les autres éléments des formes linéaires, représente aussi une cubique gauche située sur les quatre quadriques $(ab'_x c''_x) = 0$, $(ab'_x d''_x) = 0$, $(ac'_x d''_x) = 0$, $(bc'_x d''_x) = 0$. Ces équations ne sont pas indépendantes, car on a l'identité évidente

$$0 \equiv (abc'_x d''_x) \equiv a(bc'_x d''_x) - b(ac'_x d''_x) + c(ab'_x d''_x) - d(ab'_x c''_x).$$

Le système des quadriques circonscrites à la courbe peut se représenter en faisant précéder la matrice d'une ligne de constantes arbitraires α, β, γ, δ,

$$\left| \begin{matrix} \alpha & a & a'_x & a''_x \end{matrix} \right| = 0.$$

L'identité qui précède montre que ce système, malgré ses quatre paramètres, n'est que doublement infini.

L'évanouissement de la matrice considérée ici exprime que les relations

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = 0,$$
$$a'_x X_1 + b'_x X_2 + c'_x X_3 + d'_x X_4 = 0,$$
$$a''_x X_1 + b''_x X_2 + c''_x X_3 + d''_x X_4 = 0$$

sont satisfaites pour un faisceau de valeurs des X_i.

Par exemple, si les éléments de la deuxième et de la troisième ligne de la matrice sont les dérivées partielles de deux formes quadratiques, on voit que *le lieu des points dont les plans polaires relatifs à deux quadriques se coupent dans un plan donné est une cubique gauche.*

Si les X_i sont des paramètres arbitraires, les trois relations précédentes représentent les bisécantes de la cubique.

On peut multiplier par une même forme linéaire quelconque p_x, les éléments de la première ligne de la matrice $\| a\ a'_x\ a''_x \|$. Alors, si un point x annule la matrice sans annuler p_x, il existe une même relation linéaire entre les éléments, tels que ap_x, a'_x, a''_x de chaque colonne. Donc, *si quatre gerbes collinéaires ont leurs sommets dans un même plan et admettent ce plan comme élément correspondant commun, le lieu des intersections de leurs plans homologues se compose du plan considéré et d'une cubique gauche.*

Si dans la matrice $\| a\ a'_x\ a''_x \|$, a, b, c, d sont quatre paramètres arbitraires, on a un système linéaire de ∞^3 cubiques gauches, système que l'on peut appeler un *complexe* de cubiques; *toutes les courbes de ce complexe passent par les quatre points* $\| a_x\ a'_x \|_1^4 = 0$.

Les considérations ci-dessus s'étendent aisément. Ainsi l'évanouissement d'une matrice à cinq colonnes, ayant deux lignes d'éléments constants et deux lignes de formes linéaires, représente une cubique gauche. Donc *le lieu des intersections des plans homologues de cinq espaces collinéaires ayant deux plans correspondants communs se compose de ces deux plans et d'une cubique gauche.*

Plus généralement, *une matrice à* $l + 1$ *colonnes et* l *lignes, dont deux de formes linéaires et les autres de constantes, s'annule pour les points d'une cubique gauche.* Mais, à moins de se placer dans un espace à plus de trois dimensions, on ne trouve plus d'interprétation géométrique.

10. L'évanouissement de la matrice

$$\| a \quad b_x \quad c_x \quad d_x \|_1^3$$

représente aussi une cubique gauche. Donc *le lieu des points de rencontre des rayons homologues de trois espaces projectifs ayant un plan correspondant commun est une cubique gauche.*

Cette courbe est située sur la surface cubique $(b_x c_x d_x) = 0$ et sur le réseau de quadriques

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu & \nu \\ a & b_x & c_x & d_x \\ a' & b'_x & c'_x & d'_x \\ a'' & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces quadriques coupent encore la surface cubique suivant les ∞^2 cubiques gauches

$$\begin{Vmatrix} \lambda & b_x & b'_x & b''_x \\ \mu & c_x & c'_x & c''_x \\ \nu & d_x & d'_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0,$$

qui constituent, sur la surface du troisième ordre, un réseau, tandis que la matrice initiale $\| a \; b_x \; c_x \; d_x \| = 0$, où a, a', a'' sont des paramètres variables, représente le réseau conjugué (*).

Si les équations

$$lb_x + mc_x + nd_x = 0, \quad lb'_x + mc'_x + nd'_x = 0, \quad lb''_x + mc''_x + nd''_x = 0$$

(*) Comp. Reye, *Math. Ann.*, t. LV, p. 261, en note.

représentent trois plans passant par une même droite, on voit sans peine que cette droite est bisécante de toutes les cubiques du réseau $\| a\ b_x\ c_x\ d_x \|$ et qu'elle est tout entière sur la surface cubique $(b_x c_x d_x) = 0$.

L'élimination de x_1, x_2, x_3, x_4 entre les trois dernières relations, c'est-à-dire la condition pour qu'elles soient vérifiées par ∞^1 systèmes de valeurs des x, conduit à l'évanouissement d'une matrice à trois lignes et quatre colonnes de formes linéaires en l, m, n. Nous savons qu'une telle matrice s'annule pour six systèmes de valeurs de l, m, n. D'où ce théorème connu : *Sur une surface du troisième ordre, toutes les cubiques d'un même réseau ont en commun six bisécantes formant la moitié d'un double-six de la surface.*

Deux cubiques d'un même réseau, caractérisées respectivement par les valeurs a, a', a'' et a_1, a_1', a_1'' des paramètres, *ont un seul point commun,* défini par les relations

$$\| a \quad a_1 \quad b_x \quad c_x \quad d_x \|_1^3 = 0,$$

lesquelles équivalent aux trois équations de plans

$$| a \quad a_1 \quad b_x | = 0, \quad | a \quad a_1 \quad c_x | = 0, \quad | a \quad a_1 \quad d_x | = 0.$$

Ce que nous avons dit au n° 6 de la matrice angulaire conduit à cet autre résultat connu, que *deux cubiques de deux réseaux conjugués ont cinq points communs,* définis par les relations

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ a & b_x & c_x & d_x \\ a' & b_x' & c_x' & d_x' \\ a'' & b_x'' & c_x'' & d_x'' \end{vmatrix} = 0,$$

et que *deux cubiques de deux réseaux conjugués sont sur une même quadrique,* dont voici l'équation :

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu & \nu \\ a & b_x & c_x & d_x \\ a' & b_x' & c_x' & d_x' \\ a'' & b_x'' & c_x'' & d_x' \end{vmatrix} = 0.$$

Les considérations ci-dessus s'étendent aisément. Ainsi, la matrice

$$\| a \quad b \quad c_x \quad d_x \quad e_x \|_1^4$$

s'annule pour une cubique gauche située sur un réseau de quadriques dont on obtient l'équation en faisant précéder la matrice d'une ligne d'éléments 0, 0, λ, μ, ν.

Elle est aussi située sur un réseau de surfaces cubiques, comme on verra plus loin. Le système de ses bisécantes est

$$\| a \quad b \quad lc_x + md_x + ne_x \|_1^4 = 0.$$

Plus généralement, *toute matrice à* l *lignes et* $l+1$ *colonnes représente une cubique gauche si* $l-2$ *colonnes sont formées de constantes et les trois autres de formes linéaires.*

Courbe du sixième ordre.

11. Étudions la courbe annulant une matrice à trois lignes et quatre colonnes de formes linéaires. Ses propriétés ont été exposées par M. Schur (*), et nous ne démontrerons guère de vérités nouvelles. Pourtant, les développements qui suivent sont plus qu'une paraphrase algébrique des recherches de M. Schur : une bonne partie de nos raisonnements s'applique à la matrice de l lignes et $l+1$ colonnes, si bien qu'il suffira d'énoncer les résultats.

L'évanouissement de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{Vmatrix}$$

représente une *courbe gauche* c_6, *d'ordre* 6 *et de genre* 3. *Elle a*

(*) *Math. Ann.*, t. XVIII.

donc sept points doubles apparents; en d'autres termes, *ses bisécantes forment une congruence d'ordre* 7 *et de classe* 15. D'après une formule connue, *le rang de la courbe est* 16.

Pour tout point de c_6, la relation

$$\lambda a_x + \lambda' a'_x + \lambda'' a''_x = 0,$$

et les trois analogues sont compatibles en $\lambda, \lambda', \lambda''$. Donc, *la courbe est le lieu des intersections des plans homologues de quatre gerbes collinéaires.*

Un système de valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda''$ ne donne un point de c_6 que si l'on a la relation suivante, obtenue en éliminant x_1, x_2, x_3, x_4 des quatre égalités ci-dessus,

$$| \Sigma a_i\lambda \quad \Sigma b_i\lambda \quad \Sigma c_i\lambda \quad \Sigma d_i\lambda |_1^4 = 0,$$

$\Sigma a_i\lambda$ désignant $a_i\lambda + a_i'\lambda' + a_i''\lambda''$, etc. Si $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont des coordonnées homogènes dans un plan, l'équation précédente représente une courbe du quatrième ordre. Donc, *la courbe* c_6 *a une correspondance unidéterminative avec une quartique plane.*

12. En faisant précéder la matrice d'une ligne de constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a l'équation

$$| \alpha \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x | = 0$$

représentant ∞^3 *surfaces cubiques* S_3 *qui passent par* c_6.

D'après nos préliminaires, les équations de deux de ces surfaces, caractérisées par les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, équivalent à

$$\| \alpha \quad \alpha' \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x \|_1^5 \times \| a_x \quad a'_x \quad a''_x \|_1^4 = 0.$$

Donc *deux de ces surfaces* S_3 *se coupent suivant* c_6 *et suivant une cubique gauche* (n° 10). *Chacune de ces cubiques gauches coupe* c_6 *en huit points* (n° 5).

La relation

$$ma_x + nb_x + pc_x + qd_x = 0$$

et les deux analogues sont vérifiées, pour tout point x non situé sur la courbe c_6, par un seul système de valeurs de m, n, p, q. Or la forme $ma_x + nb_x + pc_x + qd_x$ et les deux analogues peuvent remplacer une colonne quelconque de la matrice représentant c_6. Donc, dans le mode de génération du numéro précédent, *un point quelconque de l'espace peut être pris pour sommet d'une des quatre gerbes projectives engendrant* c_6.

Au contraire, pour un point x de la courbe c_6, la relation $ma_x + nb_x + pc_x + qd_x = 0$ et les deux analogues sont satisfaites par un faisceau de systèmes de valeurs de m, n, p, q. Donc, *la courbe* c_6 *est le lieu des points de rencontre des rayons homologues de trois espaces projectifs superposés.*

La courbe c_6 *n'a pas de quadrisécante*, parce qu'une telle droite devrait être sur toutes les surfaces cubiques S_3 et l'intersection de deux de ces surfaces ne se compléterait pas par une cubique gauche.

Nous allons nous occuper des *trisécantes* de la courbe. Elle en a une infinité simple. Le cône perspectif à c_6 et ayant son sommet sur la courbe est du cinquième ordre et de genre 3; il a donc trois génératrices doubles. Ainsi, *par tout point de* c_6, *il passe trois trisécantes. Les trisécantes engendrent une surface qui admet* c_6 *pour courbe triple.*

Soit P un point quelconque hors de c_6. En écrivant qu'une des surfaces $S_3 \equiv | \alpha\, a_x\, a'_x\, a''_x | = 0$ passe par ce point, on établit une relation, non identique, entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Donc, *par un point non situé sur la courbe, on peut mener un réseau de surfaces* S_3.

Prenons, dans ce réseau, trois surfaces n'appartenant pas à un même faisceau et caractérisées par les valeurs $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$; $\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta'''$ des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Les points, hors de c_6, communs à ces trois surfaces sont fournis par les relations

$$\| \alpha' \quad \alpha'' \quad \alpha''' \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x \|_1^4 = 0,$$

lesquelles équivalent aux trois équations de plans

$$| \alpha' \alpha'' \alpha''' a_x | = 0, \quad | \alpha' \alpha'' \alpha''' a'_x | = 0, \quad | \alpha' \alpha'' \alpha''' a''_x | = 0.$$

En général, trois plans n'ont qu'un point commun. Donc *trois surfaces* S_3, *n'appartenant pas à un même faisceau, n'ont généralement qu'un point commun hors de la courbe.*

Mais si le point P a été choisi sur une trisécante, celle-ci est tout entière sur les ∞^2 surfaces S_3 passant par c_6 et par P, donc aussi sur les trois plans dont on vient d'écrire les équations.

Ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} ma_x + nb_x + pc_x + qd_x &= 0, \\ ma'_x + nb'_x + pc'_x + qd'_x &= 0, \\ ma''_x + nb''_x + pc''_x + qd''_x &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, si trois égalités pareilles représentent trois plans passant par une même droite g, ce qui peut arriver pour ∞^4 systèmes de valeurs de m, n, p, q, cette droite est une trisécante.

En effet, la matrice initiale peut se remplacer par

$$\| ma_x + nb_x + pc_x + qd_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \|_1^5$$

et les trois points où la droite g rencontre la surface cubique $| b_x \; c_x \; d_x | = 0$ annulent la matrice et sont donc sur c_6.

Les trois plans dont les équations viennent d'être écrites ci-dessus passent par une même droite quand m, n, p, q vérifient les relations suivantes, obtenues par élimination des x :

$$\| \Sigma a_1 m \quad \Sigma a_2 m \quad \Sigma a_3 m \quad \Sigma a_4 m \|_1^5 = 0,$$

$\Sigma a_i m$ désignant $a_i m + b_i n + c_i p + d_i q$. Or, on peut regarder m, n, p, q comme les coordonnées tangentielles d'un plan variable dans un des espaces collinéaires qui engendrent c_6. Donc, *dans chacun des trois espaces projectifs qui engendrent* c_6, *les plans qui coupent leurs deux homologues suivant une même droite*

enveloppent une développable de sixième classe, réciproque de c_6, *et les droites en question forment le système des trisécantes de* c_6.

La relation

$$ma_x + nb_x + pc_x + qd_x = 0$$

et les deux analogues établissent une *correspondance unidéterminative entre les points de* c_6 *et ses trisécantes.*

Une droite quelconque, intersection de deux plans u_x et v_x, rencontre une trisécante (m, n, p, q) si l'on a

$$\| \Sigma a_i m \quad \Sigma a_i' m \quad \Sigma a_i'' m \quad u_i \quad v_i \|_1^5 = 0,$$

et, puisque la droite (m, n, p, q) est une trisécante, on a

$$\| \Sigma a_i m \quad \Sigma a_i' m \quad \Sigma a_i'' m \|_1^5 = 0.$$

D'après nos préliminaires, ces deux matrices s'annulent pour huit systèmes de valeurs de m, n, p, q. Donc une droite quelconque rencontre huit trisécantes, ou *la surface des trisécantes est du huitième ordre.*

13. Trois surfaces S_3 ont, avons-nous dit, généralement un point P commun hors de c_6. Une de ces trois surfaces coupe chacune des deux autres suivant une cubique gauche. Ces deux cubiques gauches, ayant un point commun P, ont six bisécantes communes, situées sur la première des trois surfaces S_3, et coupant encore une fois les deux autres, évidemment sur c_6.

Il n'y a point de conique coupant c_6 *en six points,* car, par un point hors de c_6, situé sur une conique pareille, on pourrait mener un réseau de surfaces S_3 ayant en commun la conique considérée; alors des plans tels que

$$\Sigma m a_x = 0, \quad \Sigma m a_x' = 0, \quad \Sigma m a_x'' = 0$$

devraient coïncider, ce qui s'exprimerait par six conditions, entre lesquelles on pourrait éliminer m, n, p, q, et il resterait des

relations entre les coefficients des formes de la matrice initiale, circonstance qui ne se réalise que dans des cas particuliers.

Un raisonnement analogue montre que *deux trisécantes ne peuvent pas se rencontrer hors de la courbe* c_6.

D'après ce qui précède, pour que deux points hors de c_6 déterminent un faisceau de surfaces S_3, il faut et il suffit que ces points ne soient pas sur une même trisécante. En d'autres termes, *par deux points extérieurs à la courbe, il passe ou bien une trisécante, ou bien une cubique coupant huit fois* c_6.

De là résulte que *l'équation* $(\alpha a_x a'_x a''_x) = 0$ *représente toutes les surfaces cubiques passant par* c_6. Soit, en effet, T_3 une surface quelconque du troisième ordre passant par la sextique. Par deux points de T_3, non situés sur c_6 ni sur une de ses trisécantes, on peut mener une cubique octosécante c_3; celle-ci, ayant dix points sur T_3, est tout entière sur cette surface; les courbes c_6 et c_3 forment la base d'un faisceau de surfaces S_3; T_3 appartient à ce faisceau et, par suite, au système des surfaces S_3.

Par trois points hors de c_6, *non situés sur une même cubique octosécante et dont deux ne sont pas sur une même trisécante, on peut faire passer une surface* S_3 *et une seule.*

Par deux points hors de c_6 *et situés sur une même bisécante, on peut mener un faisceau de surfaces* S_3. La base de ce faisceau ne peut se compléter par une conique, car celle-ci devrait couper six fois c_6; donc cette base se complète par deux trisécantes qui rencontrent la bisécante. Ainsi, *toute bisécante est rencontrée par deux trisécantes;* ceci confirme que la surface des trisécantes est du huitième ordre.

Réciproquement, *par deux trisécantes on peut faire passer un faisceau de surfaces* S_3 *dont la base se complète par une bisécante rencontrant les deux trisécantes.*

Deux surfaces S_3 *passant par une même trisécante se coupent encore suivant une conique qui s'appuie sur la trisécante et qui coupe cinq fois* c_6. Réciproquement, *toute conique coupant cinq fois* c_6 *est rencontrée par une trisécante.*

14. Faisons précéder la matrice définissant c_6 d'une colonne de constantes déterminées λ, λ', λ''. Le tableau

$$\| \lambda \quad a_x \quad b_x \quad c_x \|$$

s'annule pour quatre points de c_6. Ces quatre points vérifient aussi l'équation suivante, quels que soient α, β, γ, δ et α', β', γ', δ' :

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \lambda & a_x & b_x & c_x & d_x \\ \lambda' & a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ \lambda'' & a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation représente une quadrique circonscrite à une cubique gauche variable coupant huit fois c_6,

$$\| \alpha \quad \alpha' \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x \|_1^4 = 0.$$

En faisant varier λ, λ', λ'', *on a donc, sur* c_6, ∞^2 *quadruples de points tels que chacun de ces groupes peut être réuni, par une quadrique, à toute cubique gauche coupant huit fois* c_6.

Un quadruple est déterminé par deux de ses points.

Un quadruple est aussi l'intersection de c_6 avec la courbe

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \lambda & a_x & b_x & c_x & d_x \\ \lambda' & a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ \lambda'' & a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

Celle-ci est une cubique gauche de la surface cubique

$$| \alpha \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x |_1^4 = 0$$

et est conjuguée, sur cette surface, de la cubique octosécante

$$\| \alpha \quad \alpha' \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x \| = 0,$$

ce qui est évident géométriquement, puisque sur une surface du troisième ordre, deux cubiques gauches de systèmes conjugués appartiennent à une même quadrique.

Une cubique gauche octosécante peut dégénérer en deux trisécantes accompagnées de la bisécante qui les coupe. Donc, *les droites menées des points d'un quadruple et s'appuyant sur deux trisécantes quelconques sont hyperboloïdiques et marquent, sur les deux trisécantes, des rapports anharmoniques égaux.* Par suite aussi, *le rapport anharmonique des plans qui projettent un quadruple donné d'une trisécante quelconque est constant.*

Soient A et B deux points d'un quadruple A, B, C, D; soit t une des deux trisécantes rencontrant AB, et soit t' une trisécante quelconque ne rencontrant ni AB, ni CD. La quadrique menée par t, t', A, B, C, D contient tout le plan (t, AB) et comme, par hypothèse, t' et CD ne sont pas dans un même plan, l'un des points C ou D est dans le plan (t, AB). Donc, *les points qui complètent le quadruple contenant* A *et* B *se trouvent de la manière suivante : chacune des deux trisécantes qui coupent* AB *détermine, avec* AB, *un plan qui coupe encore* c_6 *en un des points cherchés* C, D.

Une cubique octosécante peut dégénérer en trois trisécantes se rencontrant en un point de c_6. Donc, *les trois trisécantes issues d'un même point de la courbe et quatre points d'un quadruple sont toujours sur un cône du second ordre.*

Chaque quadruple étant défini par un système déterminé de valeurs de λ, λ', λ'', *les quadriques* Q *qui unissent deux cubiques octosécantes fixes à un quadruple variable engendrent deux réseaux projectifs.*

15. Lorsque les éléments de chaque ligne de la matrice représentant c_6 sont des dérivées partielles d'une forme quadratique, on a un cas particulier, donnant la solution de la Question 1954 des *Nouvelles Annales de mathématiques :*

La courbe c_6 *est alors le lieu des sommets des cônes contenus dans un réseau de quadriques; la conjuguée d'une droite fixe* Δ *relative aux quadriques du réseau décrit la congruence des*

bisécantes d'une des cubiques gauches coupant huit fois c_6. *Si les conjuguées d'une droite* Δ *passent par un même point, celui-ci décrit la sextique* c_6 *et* Δ *en est une trisécante.*

De la question corrélative, nous ne retiendrons qu'un cas particulier, à titre d'exemple : celui d'un réseau tangentiel de surfaces de seconde classe, dont l'une est le cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire un *faisceau tangentiel* F *de quadriques accompagnées de leurs homofocales. Les plans principaux enveloppent une développable de sixième classe* γ_6. *Les conjuguées d'une droite* Δ *par rapport à toutes ces surfaces sont des droites dans deux plans d'une développable de troisième classe* γ_3. *Chacune de ces* γ_3 *touche huit plans tangents de* γ_6. *Lorsque toutes ces conjuguées de* Δ *sont dans un plan, nécessairement perpendiculaire à* Δ, *ce plan enveloppe* γ_6 ; *toutes les droites* Δ *jouissant de cette propriété engendrent une surface réglée du huitième ordre.*

La représentation analytique de c_6 soulève des questions nouvelles, notamment la recherche des formes invariantes de douze formes linéaires propres à représenter des figures liées à la courbe c_6 ; par exemple on peut chercher l'équation de la développable osculatrice ou celle de la surface des trisécantes. Nous sommes obligé de différer ces développements pour ne pas faire de digression dans le présent travail.

16. L'évanouissement de la matrice

$$\| a \quad b_x \quad c_x \quad d_x \quad e_x \|_1^5,$$

où les éléments de la première colonne sont des constantes et les autres des formes linéaires, représente aussi la courbe c_6 que nous venons d'étudier dans les numéros précédents. Ici cette courbe est située sur la surface S_4 du quatrième ordre

$$| \ b_x \quad c_x \quad d_x \quad e_x \ | = 0.$$

Si les paramètres a, a', a'', a''' sont variables, on a un système

de ∞^5 courbes c_6 sur la même surface S_4. Une de ces courbes est encore située sur les ∞^5 surfaces cubiques

$$R_5 \equiv \begin{vmatrix} 0 & m & n & p & q \\ a & b_x & c_x & d_x & e_x \\ a' & b'_x & c'_x & d'_x & e'_x \\ a'' & b''_x & c''_x & d''_x & e''_x \\ a''' & b'''_x & c'''_x & d'''_x & e'''_x \end{vmatrix} = 0,$$

qui coupent S_4 suivant les ∞^5 courbes du sixième ordre

$$\| m \quad b_x \quad b'_x \quad b''_x \quad b'''_x \|_1^4 = 0,$$

lesquelles forment le système conjugué du précédent.

Deux courbes c_6 de même système, caractérisées par les paramètres a, a', a'', a''' et a_1, a'_1, a''_1, a'''_1 ont des points communs vérifiant les relations

$$\| a \quad a_1 \quad b_x \quad c_x \quad d_x \quad e_x \|_1^4 = 0.$$

D'après nos préliminaires, ces relations équivalent aux suivantes :

$$\| a \quad b_x \quad c_x \quad d_x \quad e_x \| = 0, \qquad | a \quad a_1 \quad b_x \quad e_x | = 0,$$

d'où il faut défalquer les solutions communes à

$$\| a \quad b_x \quad c_x \quad d_x \quad e_x \| = 0 \quad \text{et} \quad \| a \quad b_x \quad e_x \| = 0.$$

Les premières de ces relations sont vérifiées par douze points; les dernières représentent c_6 et une de ses cubiques octosécantes; il reste donc quatre points. Ainsi, *deux courbes* c_6 *de même système sur* S_4 *se coupent en quatre points, formant un quadruple sur chacune de ces courbes.*

Deux courbes c_6 *de système opposé ont aussi des points communs*, annulant la matrice angulaire déduite du déterminant R_5 par suppression de l'élément O. D'après nos préliminaires, *le nombre de ces points est quatorze.*

Courbe du dixième ordre et courbe d'ordre $\frac{l(l+1)}{2}$.

17. On généralise sans peine les points principaux de la théorie exposée au paragraphe précédent. L'évanouissement d'une matrice à quatre lignes et cinq colonnes de formes linéaires représente une courbe gauche du dixième ordre, c_{10}, rencontrée aussi par M. Schur. C'est le *lieu des points communs aux plans homologues de cinq espaces projectifs superposés*. L'arrangement en lignes de la matrice ne donne pas de génération géométrique, si l'on se limite à l'espace à trois dimensions.

La courbe c_{10} *est sur* ∞^4 *surfaces du quatrième ordre; l'intersection de deux de ces surfaces se complète par une courbe* c_6 (du paragraphe précédent), *coupant* c_{10} *en vingt points. Trois de ces surfaces du quatrième ordre ont en général quatre points communs; ces quatre points sont sur* ∞^2 *courbes* c_6 *et forment, sur chacune d'elles, un quadruple. Le genre de la courbe* c_{10} *est onze; elle a vingt-cinq points doubles apparents; par tout point de la courbe passent sept trisécantes.*

Il existe, sur la courbe c_{10}, ∞^5 *groupes de dix points dont chacun peut être réuni, au moyen d'une surface cubique, à une quelconque des courbes* c_6 *qui coupent vingt fois* c_{10}; *chacun de ces groupes de dix points est déterminé par trois de ses éléments. Ces groupes de dix points sont les intersections de* c_{10} *avec des courbes* c_6 *situées sur les surfaces quartiques contenant* c_{10} *et conjuguées, sur ces surfaces, des courbes* c_6 *qui coupent vingt fois* c_{10}.

Sur une surface du cinquième ordre représentée par un déterminant de vingt-cinq formes linéaires, on a deux systèmes conjugués de ∞^4 *courbes* c_{10}. *Deux courbes d'un même système se coupent en dix points, formant sur chacune d'elles un groupe défini ci-dessus. Deux courbes de système opposé se coupent en trente points.*

18. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit comment

tout ceci se généralise et pourquoi les extensions analytiques portent plus loin que les figures auxquelles peut atteindre la géométrie synthétique quand elle se restreint à l'espace ordinaire.

Si, dans la matrice, il y a l *lignes et* $l+1$ *colonnes de formes linéaires, la courbe représentée est d'ordre* $\frac{l(l+1)}{2}$ *et de genre* $\frac{1}{6}(l-2)(l-1)(2l+3)$; *le nombre de ses points doubles apparents est* $\frac{1}{24}(l-1)\,l(l+1)(3l-2)$.

La courbe est sur ∞^l *surfaces d'ordre* l ; *deux de celles-ci se coupent encore suivant une courbe d'ordre* $\frac{(l-1)\,l}{2}$ *rencontrant la courbe donnée en* $\frac{1}{3}(l-1)\,l(l+1)$ *points.*

Sur la courbe considérée, il y a ∞^{l-1} *groupes de* $\frac{1}{6}(l-1)\,l(l+1)$ *points, dont chacun peut être réuni, par une surface d'ordre* l, *à une des courbes d'ordre* $\frac{(l-1)\,l}{2}$ *définies ci-dessus.*

On peut envisager, sur une surface d'ordre $l+1$, *deux systèmes conjugués de courbes d'ordre* $\frac{1}{2}l(l+1)$: *deux courbes de même système se coupent en* $\frac{1}{6}(l-1)\,l(l+1)$ *points; deux courbes de système opposé ont* $\frac{1}{6}(l+1)\,l(2l+1)$ *points communs* (*).

Courbe du cinquième ordre.

19. Dans ce paragraphe et les suivants, nous examinerons des tableaux rectangulaires contenant des formes non linéaires. Comme premier exemple, posons

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x & c_x \\ a_x'^2 & b_x' & c_x' \end{matrix} \right\| = 0.$$

(*) [M. C. Segre a publié un article *Sur la génération projective des surfaces cubiques* (Archiv der Math. u. Phys., 3e série, t. X, 1906, fasc. 3 et 4); l'auteur appelle l'attention sur les variétés algébriques qui peuvent être représentées par des matrices à éléments linéaires et cite une large étude de M. Reye, *Ueber lineare Mannigfaltigkeiten*, etc. (Journ. f. Math., t. CIV à CVIII, 1889 et suiv.); dans ce dernier travail, l'exposé est constamment synthétique, sauf dans un des derniers paragraphes, où quelques-uns des résultats obtenus sont traduits sous forme algébrique.]

Ces relations représentent une *courbe gauche* c_5 *du cinquième ordre et de genre* 2, *ayant donc quatre points doubles apparents.*

M. Timerding a étudié cette figure surtout au point de vue de ses relations avec les fonctions abéliennes (*).

La courbe c_5 *est le lieu des intersections des éléments homologues de deux faisceaux projectifs de plans et d'un faisceau de quadriques projectif aux précédents.* Elle est donc aussi le *lieu des intersections d'un faisceau de quadriques et d'un système réglé projectifs entre eux.*

Si l'on multiplie b_x, b'_x par une même forme linéaire m_x, et c_x, c'_x par une autre forme linéaire n_x, l'arrangement en lignes du tableau ci-dessus donne un mode de génération de c_5 assez pénible à énoncer; mais si l'on multiplie les quatre éléments b_x, b'_x, c_x, c'_x par une même forme linéaire m_x, on voit que la courbe c_5 est engendrée de la manière suivante : *on a deux réseaux projectif de quadriques ayant chacun une conique commune et ces deux coniques étant dans un même plan* (a_x^2, m_x *et* $a_x'^2$, m_x); *deux quadriques quelconques du premier réseau se coupent encore suivant une conique* c_2 *et les quadriques homologues du second réseau se coupent encore suivant une conique* c'_2; *le lieu des points communs aux coniques* c_2 *et* c'_2 *est la courbe* c_5. Si m_x est le plan de l'infini, on a deux réseaux projectifs de quadriques semblables.

La courbe c_5 est l'intersection partielle de la quadrique $b_x c'_x - c_x b'_x = 0$ et de la surface cubique $a_x^2 b'_x - a_x'^2 b_x = 0$, qui ont encore en commun la droite, intersection des plans b_x et b'_x.

Réciproquement, *si deux surfaces du deuxième et du troisième ordre se coupent suivant une droite et une courbe du cinquième ordre, celle-ci annule une matrice comme ci-dessus.* En effet, la droite commune étant prise comme arête $x_1 x_2$ du tétraèdre de référence, les équations des surfaces peuvent être mises sous la forme

$$x_1 f - x_2 \varphi = 0, \qquad x_1 p - x_2 q = 0,$$

(*) *Journ. f. Math.*, 1901.

f et φ étant du second degré, p et q du premier. D'où

$$\left\| \begin{matrix} f & p & x_2 \\ \varphi & q & x_1 \end{matrix} \right\| = 0.$$

La quadrique $b_x c'_x - b'_x c_x = 0$ *est évidemment la seule surface du second ordre circonscrite à* c_5. Ses génératrices rencontrent c_5 aux points où elles percent la surface $a_x^2 b'_x - a'^2_x b_x = 0$ sans y rencontrer la droite (bb'); donc *toutes les génératrices de même système que* (bb') *sont des trisécantes et les autres des bisécantes.*

Toute trisécante de c_5 rencontre en trois points la quadrique $b_x c'_x - b'_x c_x = 0$ et se trouve tout entière sur cette surface, c'est-à-dire que *l'un des systèmes réglés de cette quadrique constitue le système complet des trisécantes de la courbe.* Les génératrices de l'autre système, étant des bisécantes, donnent sur c_5 une correspondance unidéterminative et involutive de points. Appelons C_2 un couple quelconque de ces points correspondants; nous y reviendrons bientôt.

20. En appelant α_x une forme linéaire quelconque, β et γ des constantes, on a les ∞^5 surfaces cubiques circonscrites à c_5

$$\left| \begin{matrix} \alpha_x & \beta & \gamma \\ a_x^2 & b_x & c_x \\ a'^2_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right| = 0.$$

Chacune des surfaces cubiques circonscrites à c_5 *contient une trisécante de la courbe*, savoir la droite représentée par

$$\left\| \begin{matrix} \beta & b_x & b'_x \\ \gamma & c_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Deux de ces surfaces cubiques, caractérisées respectivement par α_x, β, γ et par α'_x, β', γ', complètent leur intersection par la courbe

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_x & \beta & \gamma \\ \alpha'_x & \beta' & \gamma' \\ a_x^2 & b_x & c_x \\ a'^2_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

D'après nos préliminaires, cette courbe coupe c_5 en huit points. C'est d'ailleurs une biquadratique, intersection de deux surfaces du second ordre,

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \beta & \gamma \\ \alpha'_x & \beta' & \gamma' \\ a'^2_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta & \gamma \\ \alpha'_x & \beta' & \gamma' \\ a'^2_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque $\beta : \beta' = \gamma : \gamma' = k$, ces deux quadriques ont en commun la droite que voici, trisécante de c_5,

$$\begin{Vmatrix} \beta & b_x & b'_x \\ \gamma & c_x & c'_x \end{Vmatrix} = 0;$$

elles dégénèrent alors en deux plans $(\alpha_x\beta' - \alpha'_x\beta)\left(c_x - \frac{\gamma b_x}{\beta}\right)$ et $(\alpha_x\beta' - \alpha'_x\beta)\left(c'_x - \frac{\gamma b'_x}{\beta}\right)$, et l'un de ces plans est commun. Quant aux deux surfaces cubiques, elles peuvent alors être représentées par

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \beta & \gamma \\ a^2_x & b_x & c_x \\ a'^2_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} k\alpha'_x & \beta & \gamma \\ a^2_x & b_x & c_x \\ a'^2_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0;$$

elles déterminent un faisceau dont un élément a pour équation

$$(\alpha_x - k\alpha'_x)(b_x c'_x - b'_x c_x) = 0;$$

la base de ce faisceau comprend, outre c_5, la trisécante en question et une cubique plane intersection du plan $\alpha_x - k\alpha'_x = 0$ avec une des surfaces cubiques. Cette cubique plane perce six fois la quadrique $b_x c'_x - b'_x c_x = 0$, savoir cinq fois sur c_5 et une fois sur la trisécante.

21. Trois surfaces cubiques circonscrites à c_5 ont généralement quatre points communs, car la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_x & \alpha'_x & \alpha''_x & a_x^2 & a_x'^2 \\ \beta & \beta' & \beta'' & b_x & b'_x \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & c_x & c'_x \end{matrix} \right\|$$

s'annule quand on a simultanément

$$\left| \begin{matrix} \alpha_x & \alpha'_x & \alpha''_x \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \alpha_x & \alpha'_x & a_x^2 \\ \beta & \beta' & b_x \\ \gamma & \gamma' & c_x \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \alpha_x & \alpha'_x & a_x'^2 \\ \beta & \beta' & b'_x \\ \gamma & \gamma' & c'_x \end{matrix} \right| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_x & \alpha'_x \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{matrix} \right\| \geqslant 0.$$

L'inégalité est satisfaite, sauf si l'on a $\beta : \beta' = \gamma : \gamma'$. Écartons cette hypothèse pour un instant. Quant aux trois égalités, elles représentent un plan et deux quadriques, figures qui ont quatre points communs.

Toutefois le plan peut couper les deux quadriques suivant une même conique c_2, celle-ci perce alors la quadrique $b_x c'_x - b'_x c_x = 0$ en quatre points; donc c_2 rencontre c_3 en quatre points. Ou bien le plan peut couper les deux quadriques suivant une même droite g et en un point extérieur P; g perce la quadrique $b_x c'_x - b'_x c_x$ en deux points Q et Q'; l'un au moins de ces points est sur c_5; si l'autre n'est pas sur c_5, il est sur une trisécante, qui est alors commune aux trois surfaces cubiques (ainsi que la droite g). Enfin, dans le cas, exclu ci-dessus, où l'on a $\beta : \beta' = \gamma : \gamma'$, deux des surfaces cubiques ont en commun une trisécante de c_5 et une cubique plane coupant la troisième surface cubique en neuf points, dont cinq sur c_5 et quatre en dehors.

En résumé, *trois surfaces cubiques circonscrites à* c_5 *ont, ou bien une conique commune coupant quatre fois* c_5 *et pouvant dégénérer, ou bien une bisécante commune et un autre point commun, ou enfin quatre points communs, hors de* c_5 *et situés dans un même plan.*

Un tel quadruple de points est déterminé par trois de ses éléments; car, *par trois points hors de* c_5 *on peut, en général,*

faire passer un réseau de surfaces cubiques ayant un quatrième point commun. Seulement, si les trois points donnés sont sur une même conique quadrisécante, ou sur une même droite unisécante, le réseau contient cette droite ou cette conique tout entière; et si deux des points donnés sont sur une même bisécante, le réseau contient cette droite.

Par quatre points hors de c_5 *et n'appartenant pas à un même quadruple, on peut mener un faisceau de surfaces cubiques circonscrites; où par quatre points pareils on peut mener une biquadratique octosécante de* c_5. Enfin, *par cinq points hors de* c_5 *et non situés sur une même biquadratique octosécante, on peut mener une surface cubique circonscrite.*

22. Le faisceau des quadriques ayant pour base une biquadratique octosécante est représenté par

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \beta & \gamma & 0 \\ \alpha'_x & \beta' & \gamma' & 0 \\ a_x^2 & b_x & c_x & \lambda \\ a_x'^2 & b'_x & c'_x & \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est vérifiée, quels que soient $\alpha_x, \alpha'_x, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$, par les points qui annulent la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x'^2 & b_x & c_x & \lambda \\ a_x'^2 & b'_x & c'_x & \mu \end{matrix} \right\|.$$

Ces points sont les appuis, sur c_5, d'une bisécante génératrice de $b_x c'_x - b'_x c_x$; ils forment donc ce que nous avons appelé précédemment un couple de points C_2 sur la courbe c_5. Ainsi, *une biquadratique octosécante et un couple de points* C_2 *sont toujours sur une même quadrique.*

Les quadriques qui unissent deux biquadratiques octosécantes fixes à un couple mobile de points C_2 *engendrent deux faisceaux projectifs.*

Signalons en passant deux autres formes représentant la courbe c_5 :

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_x & \beta & \gamma & \delta \\ a_x^2 & b_x & c_x & d_x \\ a_x'^2 & b_x' & c_x' & d_x' \end{matrix} \right\| = 0 \quad \text{et} \quad \left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x & c_x & d \\ a_x'^2 & b_x' & c_x' & d' \\ a_x''^2 & b_x'' & c_x'' & d'' \end{matrix} \right\| = 0.$$

La seconde de ces formes se rencontrera plus tard. Pour d, d', d'' variables, elle représente ∞^2 *courbes* c_5 *situées sur une même surface du quatrième ordre. Deux de ces courbes se coupent encore en deux points, qui forment, sur chacune d'elles, un couple* C_2.

La théorie esquissée ci-dessus de la courbe c_5 peut recevoir l'extension suivante : *Chaque fois qu'une quadrique et une surface d'ordre* $n+1$ *se coupent suivant une droite et une courbe gauche* c_{2n+1}, *d'ordre* $2n+1$, *cette dernière annule une matrice de la forme*

$$\left\| \begin{matrix} a_x^n & b_x & c_x \\ a_x'^n & b_x' & c_x' \end{matrix} \right\|.$$

Cette courbe coupe n *fois les génératrices de l'un des systèmes de la quadrique et* $n+1$ *fois celles de l'autre. Elle est l'intersection partielle de deux surfaces d'ordre* $n+1$ *dont l'intersection se complète par une courbe d'ordre* n^2 *coupant* c_{2n+1} *en* $2n^2$ *points; cette courbe d'ordre* n^2 *est la base d'un faisceau de surfaces d'ordre* n *dont chacune coupe encore* c_{2n+1} *aux* n *appuis d'une génératrice du premier système de la quadrique circonscrite à* c_{2n+1}.

On sait que les courbes de ce type s'étudient aussi par la représentation plane des quadriques.

Courbe du septième ordre.

23. Dans le chapitre III de notre *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre* (Gand, Hoste, et Paris, Gauthier-Villars, 1902), nous

avons rencontré une courbe gauche du septième ordre, lieu des contacts des tangentes menées d'un point aux cubiques gauches d'une gerbe définie par deux points et trois bisécantes. M. Humbert (*) avait déjà étudié la figure plus spéciale, analogue pour le système de cubiques gauches par cinq points.

Ces deux lignes sont des cas particuliers d'une courbe c_7 étudiée, au moyen de considérations géométriques, par M. Montesano (**); elle peut se représenter par

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_x & b_x' & b_x'' \end{array} \right\| = 0.$$

L'arrangement en lignes et en colonnes donne les deux modes de génération suivants :

Étant donnés un réseau de quadriques et une gerbe projective de plans, c_7 est le lieu des points où la biquadratique intersection de deux quadriques du réseau rencontre la droite commune aux deux plans correspondants de la gerbe.

La courbe c_7 est le lieu des intersections des surfaces homologues de trois faisceaux projectifs de quadriques, faisceaux spécialisés par ce fait que trois surfaces homologues dégénèrent en deux plans et que ces trois couples de plans ont un plan commun.

D'après son mode de représentation, *la courbe c_7 passe par les huit points A_i communs aux quadriques du réseau $\lambda a_x^2 + \mu a_x'^2 + \nu a_x''^2$ et par le point B commun aux plans b, b', b''.*

Elle est située sur les ∞^2 surfaces cubiques

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_x & b_x' & b_x'' \end{array} \right| = 0.$$

Deux de ces surfaces se coupent encore suivant une conique,

$$\| \alpha \quad \beta \quad a_x^2 \quad b_x \|_4^3 = 0,$$

(*) *Journ. de l'Ec. polyt.*, t. LXIV.

(**) *Atti Accad. Torino*, t. XXVII, 1892.

dont le plan $(\alpha\ \beta\ b_x) = 0$ *passe par* B *et qui coupent* c_7 *en six points.* Chacune de ces coniques peut être réunie aux huit points A_i par une quadrique.

Puisque les éléments d'une colonne du tableau initial peuvent être remplacés par $\lambda a_x^2 + \mu a_x'^2 + \nu a_x''^2$ et $\lambda b_x + \mu b_x' + \nu b_x''$, on voit que *tout plan mené par* B *coupe encore* c_7 *en six points d'une conique et que toute quadrique par les points* A_i *coupe encore* c_7 *en six points d'une conique.*

Par un point hors de c_7, *on peut mener un faisceau de surfaces cubiques circonscrites, donc aussi une conique sexasécante de* c_7. *Par deux points hors de* c_7 *et non situés sur une telle conique, on peut mener une seule surface cubique circonscrite.*

24. Il suffira d'énoncer encore quelques résultats dont la démonstration est une suite immédiate de nos préliminaires.

La courbe c_7 *n'a pas de quadrisécante. Elle est de genre cinq et possède donc dix points doubles apparents. Par tout point de la courbe, il passe cinq trisécantes, de sorte que la surface des trisécantes a la courbe* c_7 *comme ligne quintuple.*

Voici comment on peut déterminer l'ordre de la surface des trisécantes. Le plan

$$B_x \equiv \lambda b_x + \mu b_x' + \nu b_x'' = 0$$

coupe la quadrique correspondante

$$A_x^2 \equiv \lambda a_x^2 + \mu a_x'^2 + \nu a_x''^2 = 0$$

suivant une conique qui dégénère en deux droites quand le plan touche la surface, c'est-à-dire quand on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & B_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La surface engendrée par ces coniques dégénérées, c'est-à-dire

par les trisécantes de c_7, s'obtient en éliminant λ, μ, ν entre les trois équations précédentes. Donc, *les trisécantes de* c_7 *engendrent une surface du quinzième ordre.*

La matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 & \alpha_x \\ b_x & b_x' & b_x'' & \beta \end{matrix} \right\|$$

s'annule pour un groupe G_8 *de huit points situés sur* c_7 *et pouvant être réuni, par une quadrique, à toute conique sexasécante.* Comme β et les coefficients de α_x peuvent être des paramètres arbitraires, *il y a, sur* c_7, ∞^4 *groupes* G_8.

La matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 & \alpha_x \\ b_x & b_x' & b_x'' & \beta \\ c_x & c_x' & c_x'' & \gamma \end{matrix} \right\|$$

s'annule pour une courbe c_7 *du type étudié ci-dessus. Elle est située sur une surface du quatrième ordre. Pour* β, γ *et* α_i *variables, on a* ∞^5 *courbes* c_7 *sur cette même surface. Deux de ces courbes se coupent en huit points, formant, sur chacune d'elles, un groupe* G_8. *Sur cette même surface, on a un système conjugué constitué par* ∞^2 *courbes*

$$\| a_x^2 \quad b_x \quad c_x \quad \lambda \|_1^3 = 0 ;$$

ce sont des courbes c_3 *étudiées au paragraphe précédent. Chaque courbe* c_3 *coupe chaque courbe* c_7 *en treize points.*

Des développements analogues à ce qui précède se trouvent sans peine pour la courbe d'ordre $n(n+1)+1$ annulant la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^n & a_x'^n & a_x''^n \\ b_x & b_x' & b_x'' \end{matrix} \right\|.$$

Comme cas particulier, on a ce résultat, en coordonnées cartésiennes rectangulaires : *les pieds des normales abaissées d'un*

point sur une surface f *d'ordre* n *sont sur la courbe gauche d'ordre* $n(n-1)+1$ *définie par*

$$\left\| \begin{array}{ccc} x-x' & y-y' & z-z' \\ \dfrac{df}{dx} & \dfrac{df}{dy} & \dfrac{df}{dz} \end{array} \right\| = 0.$$

Courbe du huitième ordre.

25. Considérons la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x^2 & b_x^2 & c_x \\ a_x'^2 & b_x'^2 & c_x' \end{array} \right\|.$$

Son évanouissement représente *une courbe* c_8 *du huitième ordre, formant, avec une droite* (cc'), *la base d'un faisceau de surfaces cubiques,*

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & 0 \\ a_x^2 & b_x^2 & c_x \\ a_x'^2 & b_x'^2 & c_x' \end{array} \right| = 0.$$

La droite (cc') *est une quadrisécante de* c_8, *et c'est la seule,* car toute autre quadrisécante devrait se trouver tout entière sur chaque surface du faisceau.

La courbe c_8 *est le lieu des points communs aux éléments homologues de deux faisceaux de quadriques et d'un faisceau de plans, projectifs entre eux.* Ou bien, *si l'on donne deux réseaux projectifs de quadriques, tels que deux surfaces homologues dégénèrent, l'une en un plan* c_x *et un plan* p, *l'autre en un plan* c_x' *et le même plan* p; *si* c_4 *est la courbe d'intersection de deux quadriques variables du premier réseau et* c_4' *l'intersection des quadriques homologues de l'autre, le lieu des points communs à des courbes* c_4 *et* c_4' *est la courbe* c_8.

Les surfaces homologues des faisceaux $a_x^2 + \lambda b_x^2$, $a_x'^2 + \lambda b_x'^2$ *se coupent suivant des biquadratiques ayant chacune douze points sur* c_8.

La courbe c_8 *est de genre* 7 *et a quatorze points doubles apparents. Par tout point de* c_8, *on peut mener huit trisécantes.*

Les droites situées sur les surfaces cubiques circonscrites à c_8 *sont des trisécantes, sauf celles qui rencontrent* (cc′) *et qui sont bisécantes.* Réciproquement, si une surface cubique circonscrite à c_8 passe par un point situé hors de la courbe et sur une trisécante, elle contient cette droite tout entière. Ainsi, *toute surface cubique circonscrite à* c_8 *contient la quadrisécante* (cc′), *dix bisécantes rencontrant* (cc′) *et seize trisécantes.*

La surface des trisécantes contient c_8 *comme courbe octuple; elle est du vingt-huitième ordre;* en effet, elle coupe une surface cubique circonscrite suivant seize lignes droites, outre la quadrisécante qui doit être comptée comme une trisécante quadruple; donc, si x est l'ordre de la surface des trisécantes, on a $3x = 64 + 16 + 4$, d'où $x = 28$.

On trouve de même que *les bisécantes rencontrant* (cc′) *engendrent une surface du quatorzième ordre ayant* c_8 *comme ligne triple et* (cc′) *comme ligne octuple.*

Plus généralement, le symbole

$$\left\| \begin{matrix} a_x^m & b_x^n & c_x \\ a_x'^m & b_x'^n & c_x' \end{matrix} \right\| = 0$$

représente *une courbe de l'ordre* $mn + m + n$, *formant, avec une droite* (cc′), *l'intersection complète de deux surfaces, l'une d'ordre* $m + 1$, *l'autre d'ordre* $n + 1$. On énoncera sans peine diverses propriétés de cette courbe, surtout dans le cas où l'on a $m = n$.

Courbe du neuvième ordre.

26. Le tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x & c_x & d_x \\ a_x'^2 & b_x' & c_x' & d_x' \\ a_x''^2 & b_x'' & c_x'' & d_x'' \end{matrix} \right\|$$

s'annule pour les points *d'une courbe gauche du neuvième ordre*

c_9, *lieu des intersections des éléments homologues de trois gerbes de plans et d'un réseau de quadriques projectifs entre eux.*

Cette courbe est l'intersection partielle de deux surfaces, l'une du troisième, l'autre du quatrième ordre, ayant encore une cubique gauche commune. Il ne passe par c_9 *qu'une surface cubique et les vingt-sept droites de cette surface forment le système complet des quadrisécantes de la courbe.*

La courbe est sur ∞^6 *surfaces quartiques. Deux de ces dernières se coupent encore suivant une courbe du septième ordre du type* c_7 *étudié précédemment, chacune de ces courbes* c_7 *coupe* c_9 *en vingt points. Chacune des surfaces quartiques circonscrites coupe encore la surface cubique suivant une cubique gauche* c_3 *qui rencontre encore* c_9 *en onze points. Toute courbe* c_7 *coupe, en un point hors de* c_9, *chacune des cubiques gauches* c_3.

Il existe sur c_9 *des groupes de sept points* G_7, *tels que chacun de ces groupes peut être réuni à chacune des courbes* c_7 *par une surface cubique; chacun de ces groupes* G_7 *peut aussi être réuni à chacune des cubiques* c_3 *par une quadrique. Un groupe* G_7 *est déterminé par deux de ses éléments. Ces groupes* G_7 *sont les intersections de* c_9 *avec les cubiques conjuguées des cubiques* c_3 *sur la surface cubique circonscrite; ce sont aussi les intersections de* c_9 *avec des courbes* c_3 (voir n° 19), *formant, sur les surfaces quartiques circonscrites, le système conjugué des courbes* c_7.

Jacobienne d'un système de surfaces.

27. Les courbes dont nous avons dit un mot dans les paragraphes précédents sont de simples exemples d'application des formules préliminaires. La liste de ces figures est loin d'être épuisée et, pour chacune, il serait facile de multiplier et de préciser les résultats. Nous avons, dans les esquisses précédentes, traité des questions assez diverses pour légitimer l'étude séparée de chaque figure; nous avons, d'autre part, résolu assez de problèmes communs pour qu'on devine la possibilité de les étendre au cas le plus général. Pourtant, les formules relatives à ces cas généraux ne paraissent pas fort intéressantes; nous

nous bornerons à donner un exemple de cette extension en considérant le déterminant rectangulaire de Jacobi.

Pour la Jacobienne d'un réseau de surfaces, L. Cremona *(Preliminari)* a déduit la définition, le degré et d'autres propriétés, de considérations géométriques. Quelques auteurs, tels que G. Salmon la représentent par un tableau rectangulaire; mais il ne semble pas que l'on ait tiré grand profit de ce mode d'écriture.

Considérons d'abord le cas plus général de trois surfaces u, v, w d'ordre n, n', n''. On appelle *Jacobienne* de ces trois surfaces la courbe gauche J définie par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{du}{dx_1} & \dfrac{du}{dx_2} & \dfrac{du}{dx_3} & \dfrac{du}{dx_4} \\ \dfrac{dv}{dx_1} & \dfrac{dv}{dx_2} & \dfrac{dv}{dx_3} & \dfrac{dv}{dx_4} \\ \dfrac{dw}{dx_1} & \dfrac{dw}{dx_2} & \dfrac{dw}{dx_3} & \dfrac{dw}{dx^4} \end{array} \right\|.$$

Elle est évidemment le lieu des points dont les plans polaires par rapport aux trois surfaces se coupent suivant une même droite.

D'après le n° 3, l'ordre de J est

$$(n-1)(n'-1)+(n'-1)(n''-1)+(n''-1)(n-1)+(n-1)^2 + (n'-1)^2+(n''-1)^2,$$

ou, tous calculs faits,

$$n^2+n'^2+n''^2+n'n''+n''n+nn'-4(n+n'+n'')+6,$$

résultat donné par L. Cremona.

D'après le n° 4, le genre de J est

$$1+[n^2+n'^2+n''^2+n'n''+n''n+nn'-4(n+n'+n'')+6] (n+n'+n''-5)-\tfrac{1}{2}[(n-1)^2(n'-1)+(n'-1)^2(n-1) + (n-1)^2(n''-1)+(n''-1)^2(n-1)+(n'-1)^2(n''-1) + (n''-1)^2(n'-1)+2(n-1)(n'-1)(n''-1)],$$

ou, tous calculs faits,

$$\Sigma n^2\Sigma n - 8\Sigma n^2 - 10\Sigma nn' + 22\Sigma n - 25 + \tfrac{1}{2}(\Sigma nn'\Sigma n + nn'n'').$$

Nous avons établi ce résultat dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1904, à l'occasion d'un article de M. C. Mineo donnant une autre démonstration de cette formule.

Si les nombres n, n', n'' sont égaux, la courbe J est d'ordre $6(n-1)^2$ et de genre $14n^3 - 54n^2 + 66n - 25$. Dans ce cas, elle s'appelle aussi la Jacobienne du réseau $\lambda u + \mu v + \nu w$, car elle est évidemment la Jacobienne de trois surfaces quelconques de ce réseau. Alors aussi elle est, comme on sait, le lieu des points doubles des surfaces du réseau, ou le lieu des contacts des surfaces du réseau qui se touchent entre elles.

28. Mais les points communs aux surfaces du réseau ne sont pas, en général, sur la courbe J. Pour élucider cette question, reprenons le cas de trois surfaces d'ordres n, n', n'' et supposons qu'un point soit multiple, respectivement d'ordre r, r', r'' sur chacune de ces surfaces. Prenons ce point pour sommet $x_1\,x_2\,x_3$ du tétraèdre de référence : les termes de degré le plus élevé en x_4 dans les équations des surfaces ont respectivement la forme

$$x_4^{n-r}\varphi(x_1, x_2, x_3) \quad x_4^{n'-r'}\psi(x_1, x_2, x_3), \quad x_4^{n''-r''}\chi(x_1, x_2, x_3).$$

Une des surfaces d'ordre $n + n' + n'' - 3$ circonscrites à la courbe J, par exemple

$$\mathrm{T}_i \equiv \left|\frac{du}{dx_i}\ \frac{dv}{dx_i}\ \frac{dw}{dx_i}\right| = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

a pour termes de l'ordre le plus élevé en x_4

$$\begin{vmatrix} x_4^{n-r}\dfrac{d\varphi}{dx_1} & x_4^{n-r}\dfrac{d\varphi}{dx_2} & x_4^{n-r}\dfrac{d\varphi}{dx_3} \\ x_4^{n'-r'}\dfrac{d\psi}{dx_1} & x_4^{n'-r'}\dfrac{d\psi}{dx_2} & x_4^{n'-r'}\dfrac{d\psi}{dx_3} \\ x_4^{n''-r''}\dfrac{d\chi}{dx_1} & x_4^{n''-r''}\dfrac{d\chi}{dx_2} & x_4^{n''-r''}\dfrac{d\chi}{dx_3} \end{vmatrix}.$$

L'ordre de ces termes en x_4 est donc $n + n' + n'' - r - r' - r''$ et le sommet considéré est d'ordre $r + r' + r'' - 3$ sur la surface T_1.

Pour une autre surface T_2 dont l'équation comprend les colonnes 1, 2, 4 du tableau J, les termes de l'ordre le plus élevé en x_4 sont

$$\begin{vmatrix} x_4^{n-r}\dfrac{d\varphi}{dx_1} & x_4^{n-r}\dfrac{d\varphi}{dx_2} & (n-r)x_4^{n-r-1}\varphi \\ x_4^{n'-r'}\dfrac{d\psi}{dx_1} & x_4^{n'-r'}\dfrac{d\psi}{dx_2} & (n'-r')x_4^{n'-r'-1}\psi \\ x_4^{n''-r''}\dfrac{d\chi}{dx_1} & x_4^{n''-r''}\dfrac{d\chi}{dx_2} & (n''-r'')x_4^{n''-r''-1}\chi \end{vmatrix}.$$

L'ordre de ces termes est $n + n' + n'' - r - r' - r'' - 1$ et le point est multiple d'ordre $r + r' + r'' - 2$.

Sur l'intersection des surfaces T_1 et T_2, le point considéré est multiple d'ordre $(r + r' + r'' - 3)(r + r' + r'' - 2) = (\Sigma r - 3)(\Sigma r - 2)$.

Mais, outre la courbe J, cette intersection comprend une courbe K définie par les deux premières colonnes de la matrice J. On verra, comme plus haut, que K est sur deux surfaces ayant le point considéré comme point multiple d'ordre $(r + r' - 2)$ et $(r + r'' - 2)$ et se coupant encore suivant une courbe K′ intersection totale des surfaces $\frac{du}{dx_1} = 0$, $\frac{du}{dx_2} = 0$, et cette courbe K′ a le point considéré comme point multiple d'ordre $(r - 1)^2$.

Finalement, sur la courbe J, le degré de multiplicité du sommet considéré est

$$\begin{aligned}(\Sigma r - 3)(\Sigma r - 2) - (r + r' - 2)(r + r'' - 2) + (r - 1)^2 \\ = \Sigma r^2 + \Sigma rr' - 3\Sigma r + 3.\end{aligned}$$

Ce nombre est nul quand on a $r = r' = r'' = 1$; c'est ainsi que la Jacobienne ne passe pas par les points simples isolés communs aux trois surfaces.

Si le point considéré est multiple d'ordre r sur chaque surface,

il est multiple d'ordre $6r^2 - 9r + 3 \equiv 3(2r-1)(r-1)$ sur la Jacobienne.

Il se peut que les surfaces u, v, w aient une courbe commune. En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, l'équation générale des surfaces d'ordre $\Sigma n - 3$ circonscrites à J peut s'écrire

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \Sigma_i^4 \alpha_i x_i \\ \dfrac{du}{dx_1} & \dfrac{du}{dx_2} & \dfrac{du}{dx_3} & nu \\ \dfrac{dv}{dx_1} & \dfrac{dv}{dx_2} & \dfrac{dv}{dx_3} & n'v \\ \dfrac{dw}{dx_1} & \dfrac{dw}{dx_2} & \dfrac{dw}{dx_3} & n''w \end{vmatrix} = 0.$$

Les points où la courbe commune à u, v, w coupe la surface

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du}{dx_i} & \dfrac{dv}{dx_i} & \dfrac{dw}{dx_i} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

appartiennent à toutes les surfaces S et, par suite, à la courbe J.

29. Deux surfaces d'ordre $\Sigma n - 3$ circonscrites à J,

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_i & \dfrac{du}{dx_i} & \dfrac{dv}{dx_i} & \dfrac{dw}{dx_i} \end{vmatrix} = 0, \qquad S' \equiv \begin{vmatrix} \beta_i & \dfrac{du}{dx_i} & \dfrac{dv}{dx_i} & \dfrac{dw}{dx_i} \end{vmatrix} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

se coupent encore suivant une courbe K définie par

$$\begin{Vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \dfrac{du}{dx_i} & \dfrac{dv}{dx_i} & \dfrac{dw}{dx_i} \end{Vmatrix} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Celle-ci est le lieu des points dont les plans polaires relatifs aux trois surfaces se coupent sur la droite $\alpha\beta$ intersection des plans $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$. Cette courbe est d'ordre

$$(n + n' - 2)(n + n'' - 2) - (n-1)^2$$
$$\equiv nn' + n'n'' + n''n - 2(n + n' + n'') + 3.$$

Elle coupe la courbe J en des points dont le nombre s'évalue par la méthode du n° 5. On trouve

$$(n + n' + n'' - 3)[nn' + n'n'' + n''n - 2(n + n' + n'') + 3] - (n-1)(n'-1)(n''-1).$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat?

Pour tout point de la Jacobienne, les plans polaires relatifs aux surfaces u, v, w se coupent suivant une même droite d. Toutes ces droites décrivent une surface que l'on pourrait appeler *Steinérienne* des trois surfaces u, v, w, ou, si elles sont de même ordre, du réseau $\lambda u + \mu v + \nu w$.

Les premières surfaces polaires des points d'une droite relatives aux trois surfaces u, v, w forment trois faisceaux; quand la droite en question est génératrice de la Steinérienne, les courbes de base de ces trois faisceaux ont un point commun x sur la Jacobienne et, en général, un seul. Si la droite en question rencontre $\alpha\beta$, le point x est en même temps sur la courbe K, lieu des points dont les plans polaires relatifs à u, v, w se coupent sur $\alpha\beta$ et réciproquement. Donc le nombre des intersections des courbes K et J est généralement égal au nombre des intersections d'une droite arbitraire $\alpha\beta$ avec les génératrices de la Steinérienne, ou encore égal à l'ordre de cette surface Steinérienne. Cet ordre est donc

$$(\Sigma n - 3)(\Sigma nn' - 2\Sigma n + 3) - (n-1)(n'-1)(n''-1).$$

Pour $n = n' = n'' = 2$, ce nombre est 8; c'est l'ordre de la surface des trisécantes de la courbe c_6 définie au n° 11.

Pour $n = n' = n''$, ce nombre est $8(n-1)^3$.

30. Considérons un réseau de surfaces d'ordre n. Faisons suivre la matrice Jacobienne d'une colonne de constantes λ, μ, ν. La nouvelle matrice s'annule pour $4(n-1)^3$ points, dont chacun n'a qu'un seul plan polaire par rapport aux surfaces d'un certain faisceau F pris dans le réseau donné. Le faisceau F dépend des constantes λ, μ, ν. Les $4(n-1)^3$ points sont aussi les points singuliers de surfaces de ce faisceau F.

Si l'on fait varier λ, μ, ν, on a, sur la Jacobienne, ∞^2 groupes de points pareils. Chaque groupe est déterminé par deux de ses éléments et peut être réuni à chaque courbe K (voir numéro précédent) au moyen d'une surface d'ordre $2(n-1)$. Une telle surface est le lieu des points dont les plans polaires relatifs aux surfaces du faisceau F correspondant se coupent sur une certaine droite $\alpha\beta$.

31. L. Cremona *(Preliminari)* a aussi défini la courbe Jacobienne de cinq surfaces, d'ordres n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, par exemple. Cette courbe est le lieu des points dont les plans polaires relatifs aux cinq surfaces passent par un même point; elle est représentée par l'évanouissement d'une matrice à cinq colonnes de quatre éléments chacune; les éléments de chaque colonne sont les dérivées partielles de la forme représentant une des surfaces.

D'après ce qui précède, il est permis d'énoncer simplement les principales propriétés de cette courbe. Elle passe par les points communs aux surfaces données, quand il y a des points pareils, mais non par les points singuliers des surfaces. Quand les nombres n_i sont égaux, elle est aussi la Jacobienne de cinq surfaces quelconques du système linéaire quadruplement infini déterminé par les surfaces données. En général, la Jacobienne des cinq surfaces est de l'ordre (voir nos préliminaires)

$$\Sigma(n_1-1)(n_2-1) = \Sigma n_1 n_2 - 4\Sigma n + 10.$$

Elle rencontre la Jacobienne des trois premières surfaces, par exemple, en un nombre de points égal à

$$(n_4+n_2+n_3-3)[n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1-2(n_1+n_2+n_3)+3]-(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)$$
$$+(n_4+n_5-2)[n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1-4(n_1+n_2+n_3)+6].$$

Dans le cas spécial où tous les nombres n_i sont égaux, la Jacobienne est d'ordre $10(n-1)^2$; elle est alors sur ∞^4 surfaces d'ordre $4(n-1)$; deux quelconques de ces surfaces se coupent encore suivant une courbe d'ordre $6(n-1)^2$ coupant la Jacobienne en $20(n-1)^3$ points.

Dans le cas plus spécial où les cinq surfaces sont des quadriques, la Jacobienne est une courbe du dixième ordre, appartenant au type c_{10} étudié au n° 17. Si les quadriques ont deux points communs, la droite qui les joint fait évidemment partie de la Jacobienne. Cinq quadriques définissant un système quadruplement infini ont, au plus, cinq points communs. Lorsqu'il en est ainsi, la courbe c_{10} se réduit aux droites joignant ces points deux à deux. Si les quadriques passent par une même conique, il n'y a plus de courbe Jacobienne : tous les points du plan de la conique répondent à la définition géométrique de la Jacobienne.

Dans le cas général, le genre de la Jacobienne de cinq surfaces se trouve en appliquant soit la méthode, soit la formule du n° 4; c'est

$$g = 1 + (\Sigma n_1 n_2 - 4\Sigma n + 10)(\Sigma n - 7) - \tfrac{1}{2}[\Sigma(n_1 - 1)^2(n_2 - 1) + 2\Sigma(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)].$$

Après quelques calculs, ce résultat peut s'écrire

$$g = \tfrac{1}{2}[\Sigma n \Sigma n_1 n_2 - 4(\Sigma n)^2 + 52\Sigma n - 12\Sigma n_1 n_2 + \Sigma n_1 n_2 n_3 - 98].$$

Si les cinq surfaces sont d'ordre n, le genre est

$$30n^5 - 110n^2 + 130n - 49.$$

Dans ce dernier cas, si l'on fait précéder la matrice d'une colonne de constantes arbitraires, on obtient, sur la courbe, ∞^3 groupes remarquables de $10(n-1)^5$ points. Chacun de ces groupes peut être réuni, par une surface d'ordre $5(n-1)$ à chacune des courbes d'ordre $6(n-1)^2$ qui coupent la Jacobienne en $20(n-1)^5$ points. Chacun de ces groupes est composé des points dont les plans polaires relatifs aux surfaces du système donné se coupent dans un certain plan déterminé.

Élimination dans le sens restreint.

32. La représentation d'une ligne par une matrice ne donne pas seulement l'ordre et le genre de la figure, mais implique

une connaissance plus profonde de l'objet et donne notamment ses propriétés fondamentales, modes de génération, surfaces circonscrites d'ordre le moins élevé, courbes multisécantes, groupes de points remarquables, etc. La solution d'un problème obtenue sous forme d'une matrice peut donc être considérée comme une réponse passablement complète à la question posée.

Il serait intéressant de savoir quelles courbes gauches peuvent être représentées par des matrices. Ce problème se présente sous un double aspect, soit que l'on n'admette comme éléments de la matrice que des formes les plus générales de leur ordre et sans relations identiques entre elles, soit que l'on fasse abstraction de ces conditions. Dans le premier cas, il suffit de satisfaire par des nombres entiers aux formules donnant l'ordre et le genre de la courbe gauche, et l'on voit immédiatement que toute courbe algébrique ne peut pas annuler une matrice; notamment la biquadratique unicursale ne se prête pas à ce mode de représentation.

Bref, le problème paraît fort difficile; nous espérons pouvoir, dans l'avenir, y consacrer nos recherches. Ici nous nous bornons à exposer quelques manières très générales d'obtenir, sous forme d'une matrice, la représentation d'une courbe gauche.

D'abord toute courbe représentée par $l+1$ équations contenant l paramètres homogènes au premier degré rentre dans la catégorie des figures dont nous nous occupons. Cela est si évident que tout commentaire serait superflu. Traitons seulement, à titre d'exemple, une question que nous avons résolue dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (1904) à la suite d'un article de M. C. Mineo, paru dans le même recueil et sur le même sujet (*).

Soit à chercher le lieu des points de contact des surfaces d'un faisceau d'ordre n avec les surfaces d'un autre faisceau d'ordre n'. Ces faisceaux seront représentés par les équations

$$F + kF_1 = 0, \quad f + lf_1 = 0.$$

(*) Question généralisée depuis par M. Giambelli, *Rend. Palermo*, 1907.

Pour tout point du lieu on a les relations

$$F + kF_1 = 0,$$

$$\frac{dF}{dx_i} + k\frac{dF_1}{dx_i} = \rho\left(\frac{df}{dx_i} + l\frac{df_1}{dx_i}\right), \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

qui expriment que le point est sur une surface du premier faisceau et qu'il a le même plan polaire par rapport à cette surface et à une surface de l'autre faisceau. L'élimination de k, ρ, l donne la courbe

$$\left\| \begin{array}{cccc} F & \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} \\ F_1 & \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} & \frac{dF_1}{dx_3} & \frac{dF_1}{dx_4} \\ 0 & \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ 0 & \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \end{array} \right\| = 0.$$

Les éléments de la première colonne peuvent être remplacés par o, o, f, f_1.

La courbe est de l'ordre

$$\mu = 3(n^2 + n'^2 - 2) + 4(nn' - 2n - 2n').$$

Le genre se trouve en appliquant la méthode ou la formule du n° 4; pour le développement du calcul, on peut consulter notre article des *Rendiconti di Palermo;* on obtient

$$g = (n + n' - 2)[3(n^2 + n'^2 + nn') - 4(4n + 4n' - 5)] + 2nn' - 1.$$

Les points où la courbe A, base du faisceau $F + kF_1$, coupe le lieu considéré sont les mêmes que ceux où la courbe A coupe la surface

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{dF}{dx_i} & \frac{dF_1}{dx_i} & \frac{df}{dx_i} & \frac{df_1}{dx_i} \end{array} \right| = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

leur nombre est donc

$$2n^2(n + n' - 2).$$

De même, la courbe de base du faisceau $f + lf_1$ coupe le lieu en $2n'^2(n + n' - 2)$ points.

Dans la matrice qui représente le lieu, on peut remplacer les éléments de la dernière ligne par

$$0,\ \frac{df}{dx_1} + l\frac{df_1}{dx_1},\ \frac{df}{dx_2} + l\frac{df_1}{dx_2},\ \frac{df}{dx_3} + l\frac{df_1}{dx_3},\ \frac{df}{dx_4} + l\frac{df_1}{dx_4}.$$

Si la surface $f + lf_1 = 0$ a un point double, celui-ci annule alors les éléments de la dernière ligne de la matrice; il est donc, en général, un point simple du lieu.

33. On peut encore représenter par une matrice toute courbe gauche définie de la manière suivante : les équations de trois surfaces contiennent, à un degré quelconque, un même paramètre variable t; le lieu des points communs à ces trois surfaces est l'ensemble des points pour lesquels ces trois équations sont vérifiées par *une* même valeur de t. C'est-à-dire que le lieu est une courbe dont la représentation s'obtient en *éliminant* t entre les trois équations. C'est là, en effet, le sens habituel, géométrique, du mot *élimination*, et nous insistons sur ce fait parce que nous aurons bientôt à envisager ce terme dans un sens plus étendu.

Considérons, pour fixer les idées, les trois équations

$$at^2 + bt + c = 0, \qquad a't^2 + b't + c' = 0,$$
$$mt^3 + nt^2 + pt + q = 0.$$

Cherchons les conditions pour qu'elles soient vérifiées par une même valeur de t; soit θ cette valeur; nous aurons

$$\begin{aligned} a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta &= 0,\\ a\theta^2 + b\theta + c &= 0,\\ a'\theta^3 + b'\theta^2 + c'\theta &= 0,\\ a'\theta^2 + b'\theta + c' &= 0,\\ m\theta^3 + n\theta^2 + p\theta + q &= 0. \end{aligned}$$

Regardons θ^3, θ^2 et θ comme trois inconnues différentes à éliminer; il vient

$$M \equiv \begin{Vmatrix} a & & a' & & m \\ b & a & b' & a' & n \\ c & b & c' & b' & p \\ & c & & c' & q \end{Vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si cette matrice s'évanouit, d'abord le déterminant Δ formé par les quatre premières colonnes de M est nul et les équations $at^2 + bt + c = 0$, $a't^2 + b't + c' = 0$ ont une racine commune. De plus, il y a un faisceau de relations linéaires entre les éléments des quatre lignes de M, c'est-à-dire que l'on a, pour ∞^1 systèmes de valeurs de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 et, pour toute valeur de t,

$$\lambda_1 t(at^2 + bt + c) + \lambda_2(at^2 + bt + c) + \lambda_3 t(a't^2 + b't + c') + \lambda_4(a't^2 + b't + c') + \lambda_5(mt^3 + nt^2 + pt + q) = 0.$$

Supposons d'abord que les premiers mineurs du déterminant Δ ne soient pas tous nuls. On peut donc trouver au moins un système de valeurs de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, tel que λ_5 ne soit pas nul. Dès lors, en vertu de la relation précédente, la racine commune aux deux équations $at^2 + bt + c = 0$, $a't^2 + b't + c' = 0$ annule $\lambda_5(mt^3 + nt^2 + pt + q)$ et, par suite, $mt^3 + nt^2 + pt + q$.

Si tous les premiers mineurs du déterminant Δ sont nuls, on voit aisément que l'on doit avoir

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} = 0,$$

et réciproquement. Or, dans ce cas, les deux premières équations ont deux racines communes, et la matrice M s'annule sans que les trois équations proposées aient une racine commune. Donc les conditions pour que les équations proposées soient vérifiées par une même valeur de t peuvent s'écrire

$$M = 0, \quad \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} \gtrless 0.$$

En apparence, il n'y a aucune difficulté à étendre ce raisonnement au cas où t figure dans les équations proposées avec des exposants quelconques λ, μ, ν. L'un au moins de ces trois nombres est plus petit que la somme des deux autres, et nous pouvons supposer, par exemple, $\nu \leqq \lambda + \mu - 1$. On multiplie la première égalité par $1, t, t^2, \ldots t^{\mu-1}$, la seconde par $1, t, t^2, \ldots t^{\lambda-1}$, et, en y joignant la dernière égalité, on a $\mu + \lambda + 1$ équations à $\mu + \lambda - 1$ inconnues; l'élimination des puissances de t donne une matrice à $\mu + \lambda$ lignes et $\mu + \lambda + 1$ colonnes.

Malheureusement, quand on a $\nu < \lambda + \mu - 1$, il y a encore une restriction. Pour l'expliquer, reprenons l'exemple de tantôt, mais en supposant que les trois équations soient du second degré, donc que m soit nul. Si l'on divise par t^5 les termes de l'égalité en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$, on trouve

$$\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2}\right)\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{t}\right) + \left(a' + \frac{b'}{t} + \frac{c'}{t^2}\right)\left(\lambda_3 + \frac{\lambda_4}{t}\right)$$
$$+ \left(\frac{n}{t} + \frac{p}{t^2} + \frac{q}{t^3}\right)\lambda_5 = 0.$$

Or, pour $a = a' = 0$, le tableau M s'annule; la racine commune aux deux premières équations est infinie et ne vérifie pas l'équation $nt^2 + pt + q = 0$. Dans le cas où le degré ν est inférieur à $\lambda + \mu - 1$, il faut donc encore ajouter la condition

$$a^2 + a'^2 > 0.$$

Le problème des lieux géométriques.

34. Donnons au mot *élimination* un sens plus étendu. En algèbre, on comprend, sous ce titre, la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations aient *une ou plusieurs* racines communes.

Soient, pour fixer les idées, les deux équations

$$F \equiv at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0,$$
$$f \equiv mt^3 + nt^2 + pt + q = 0.$$

Si elles ont deux racines communes, les égalités $F = 0$,

$tF = 0$, $f = 0$, $tf = 0$, $t^2 f = 0$ sont satisfaites pour deux, et par suite pour ∞^1 systèmes de valeurs des quantités t, t^2, t^3, t^4, t^5, assimilées à des inconnues distinctes, et l'on a

$$M \equiv \begin{Vmatrix} & a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e & \\ m & n & p & q & & \\ & m & n & p & q & \\ & & m & n & p & q \end{Vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si cette matrice est nulle, il existe une même relation linéaire entre les termes des six colonnes et l'on a, pour un système de valeurs de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 et pour toute valeur de t,

$$(\lambda_1 + \lambda_2 t)(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e)$$
$$+ (\lambda_3 t^2 + \lambda_4 t + \lambda_5)(mt^3 + nt^2 + pt + q) = 0.$$

Chacune des quatre racines de $F = 0$ annule le produit des deux dernières parenthèses. Or, comme $F = 0$ ne peut avoir plus de deux racines communes avec $\lambda_3 t^2 + \lambda_4 t + \lambda_5 = 0$, elle a au moins deux racines communes avec $mt^3 + nt^2 + pt + q = 0$.

Nous avons reproduit ici cette démonstration connue pour ne pas laisser de lacune dans notre exposé.

Si $F = 0$, $f = 0$ sont les équations de deux surfaces dépendant d'un même paramètre variable t, c'est-à-dire si leurs coefficients sont des formes quaternaires, $M = 0$ représente une courbe gauche.

Il va sans dire que l'on peut opérer en coordonnées tangentielles et parler de surfaces développables. On peut aussi, de la même manière que ci-dessus, trouver les conditions de l'existence de trois, quatre, ... racines communes à deux équations d'ordre suffisamment grand.

35. Ceci nous amène à étudier en général le problème des lieux géométriques. Soient, en coordonnées cartésiennes non homogènes, x, y, z,

$$F(x, y, z; t) = 0, \quad f(x, y, z; t) = 0,$$

deux équations dont les coefficients sont des fonctions entières d'un même paramètre t. En éliminant t, c'est-à-dire en écrivant la condition pour que ces relations soient vérifiées par *une* même valeur de t, on obtient l'équation d'un lieu géométrique; F et f s'appellent quelquefois les *génératrices* du lieu.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point A du lieu, répondant à la valeur t_0 du paramètre. Une droite quelconque d, passant par A, a pour équations

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = \rho.$$

Les points où cette droite d rencontre encore le lieu s'obtiennent de la manière suivante : on pose $t = t_0 + \theta$, puis on résoud, par rapport à ρ et θ, les deux équations

$$F(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho; t_0 + \theta) = 0,$$
$$f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho; t_0 + \theta) = 0.$$

A chaque système de valeurs de θ et ρ qui vérifient ces deux égalités répond un point du lieu situé sur la droite d. Or, ces deux relations représentent deux courbes dans un plan, si l'on regarde θ et ρ comme des coordonnées cartésiennes. Elles sont satisfaites, par hypothèse, pour le système $\theta = \rho = 0$, qui répond au point A; en d'autres termes, les deux courbes planes passent par l'origine des coordonnées.

Pour qu'un second point du lieu coïncide avec A, il faut que les deux courbes en ρ et θ, ou bien se coupent encore en un point de l'axe des θ, ou bien se touchent à l'origine; ou enfin, il faut que l'une d'elles ait un point double à l'origine. Or, les équations de ces courbes peuvent s'écrire comme il suit :

$$\rho\left[\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0}\right] + \theta\frac{dF}{dt_0} + \ldots = 0,$$
$$\rho\left[\lambda\frac{df}{dx_0} + \mu\frac{df}{dy_0} + \nu\frac{df}{dz_0}\right] + \theta\frac{df}{dt_0} + \ldots = 0,$$

puisque les termes indépendants de ρ et θ sont nuls par hypothèse.

La première des trois alternatives, celle où les deux courbes se coupent encore sur l'axe des θ, exige que l'ensemble des termes indépendants de ρ dans chaque équation s'annule pour une même valeur de θ, autre que θ = 0. Cette condition est indépendante de λ, μ, ν; quand elle est réalisée, les équations primitives $F(x, y, z; t) = 0$ et $f(x, y, z; t) = 0$ sont satisfaites par les coordonnées du point A et par deux valeurs au moins, généralement distinctes, de t. Alors aussi, toute droite passant par A rencontre le lieu en deux points coïncidents et A est un point singulier du lieu, en général un point double.

Dans la seconde alternative, celle où les deux courbes planes se touchent à l'origine, on a

$$E \equiv \left(\lambda \frac{dF}{dx_0} + \mu \frac{dF}{dy_0} + \nu \frac{dF}{dz_0}\right) \frac{df}{dt_0} - \left(\lambda \frac{df}{dx_0} + \mu \frac{df}{dy_0} + \nu \frac{df}{dz_0}\right) \frac{dF}{dt_0} = 0.$$

Si l'on regarde λ, μ, ν comme les coordonnées d'un rayon de la gerbe de sommet A, cette dernière relation représente le plan tangent au lieu géométrique en A.

La troisième alternative, où l'une des courbes, F par exemple, a un point double à l'origine, s'exprime par les relations

$$\lambda \frac{dF}{dx_0} + \mu \frac{dF}{dy_0} + \nu \frac{dF}{dz_0} = 0, \quad \frac{dF}{dt_0} = 0.$$

Réciproquement, si A est un point singulier du lieu, il faut que l'une des trois circonstances examinées ci-dessus se réalise, quels que soient λ, μ, ν.

Donc : ou bien les équations primitives sont vérifiées pour deux valeurs de t;

Ou bien l'expression E s'annule, quels que soient λ, μ, ν, et l'on a

$$\frac{dF}{dx_0} : \frac{df}{dx_0} = \frac{dF}{dy_0} : \frac{df}{dy_0} = \frac{dF}{dz_0} : \frac{df}{dz_0} = \frac{dF}{dt_0} : \frac{df}{dt_0},$$

en même temps que $F(x_0, y_0, z_0; t_0) = 0$ et $f(x_0, y_0, z_0; t_0) = 0$,

ce qui fait un total de cinq relations entre quatre inconnues x_0, y_0, z_0, t_0; ces conditions sont ordinairement incompatibles (*).

Ou enfin on doit avoir

$$\frac{dF}{dx_0} = \frac{dF}{dy_0} = \frac{dF}{dz_0} = \frac{dF}{dt_0} = 0, \quad F = 0, \quad f = 0,$$

et ce cas rentre évidemment dans le précédent.

En général, on aura la courbe singulière d'un lieu en écrivant les conditions pour que les équations génératrices soient vérifiées simultanément par deux valeurs au moins du paramètre. Exceptionnellement, il peut y avoir d'autres points singuliers en nombre fini ou infini quand cinq équations en x, y, z, t *sont compatibles.*

36. Si les équations $F = 0, f = 0$ sont satisfaites simultanément par les coordonnées d'un point A et par trois, quatre, etc. valeurs de t (distinctes ou non), le point A est un point triple, quadruple, ... du lieu. Les conditions qui doivent être réalisées dans ces divers cas sont respectivement au nombre de trois, quatre, etc. Par suite, si l'on s'en tient à l'espace à trois dimensions, le lieu possède en général un nombre fini de points triples situés sur la courbe singulière, mais aucun point multiple d'ordre plus élevé.

Sauf dans des cas particuliers, la courbe singulière est une courbe double dont l'ordre et le genre sont fonctions des degrés des surfaces F et f et des exposants qui affectent t dans les deux équations. Supposons que F soit de degré m en x, y, z et contienne t à la puissance μ; que f soit de degré n et contienne t à

(*) [L'expression E s'annule encore quels que soient λ, μ, ν, si l'on a $\frac{dF}{dt_0} = \frac{af}{dt_0} = 0$; ce cas rentre dans le précédent : les équations primitives sont vérifiées pour deux valeurs coïncidentes de t. L'espèce de point singulier que l'on obtient ainsi est analysée quelques pages plus loin. La présente correction nous est suggérée par une communication de M. Gob, professeur à l'Athénée de Liége, qui a découvert un très intéressant théorème sur les enveloppes de surfaces; sa démonstration nécessite des calculs analogues à ceux dont nous faisons usage.]

la puissance ν. Le lieu est en général de l'ordre $m\nu + n\mu$. Sa courbe double annule une matrice à $\mu + \nu - 1$ colonnes, dont $\nu - 1$ lignes contiennent des formes d'ordre m, et $\mu - 1$ lignes des formes d'ordre n. L'ordre ρ de cette courbe est, d'après le n° 3,

$$\rho = \frac{m^2(\nu-1)(\nu-2)}{2} + mn(\nu-1)(\mu-1) + \frac{n^2(\mu-1)(\mu-2)}{2} + m^2(\nu-1) + n^2(\mu-1);$$

ce résultat peut s'écrire sous les formes suivantes

$$\rho = \frac{1}{2}[(m\nu + n\mu)^2 - (m\nu + n\mu)(m+n) - mn(\mu+\nu-2)],$$

$$\rho = \frac{m^2\nu(\nu-1)}{2} + mn(\nu-1)(\mu-1) + \frac{n^2\mu(\mu-1)}{2}.$$

Le genre de la courbe se trouve par la formule du n° 4 :

$$g = 1 + \rho[m(\nu-1) + n(\mu-1) - 2]$$
$$- \frac{1}{2}\Big[m^3\nu - 1)(\nu-2) + m^2n(\nu-1)(\mu-1) + mn^2(\nu-1)(\mu-1)$$
$$+ n^3(\mu-1)(\mu-2) + 2\frac{m^3(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3} + 2\frac{m^2n(\nu-1)(\nu-2)(\mu-1)}{2}$$
$$+ 2\frac{mn^2(\nu-1)(\mu-1)(\mu-2)}{2} + 2\frac{n^3(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}\Big],$$

$$g = 1 - 2\rho + \left[\frac{m^2\nu(\nu-1)}{2} + mn(\nu-1)(\mu-1) + \frac{n^2\mu(\mu-1)}{2}\right]$$
$$[m(\nu-1) + n(\mu-1)] - \frac{1}{2}\Big[\frac{m^3\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3} + m^2n(\nu-1)^2(\mu-1)$$
$$+ mn^2(\nu-1)(\mu-1)^2 + \frac{n^3\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3}\Big],$$

$$g = 1 - 2\rho + \frac{1}{6}m^3\nu(\nu-1)(2\nu-1) + \frac{1}{2}m^2n(\nu-1)(2\nu-1)(\mu-1)$$
$$+ \frac{1}{2}mn^2(\nu-1)(\mu-1)(2\mu-1) + \frac{1}{6}n^3\mu(\mu-1)(2\mu-1),$$

ou enfin

$$g = 1 - m^2\nu(\nu-1) - 2mn(\nu-1)(\mu-1) - n^2\mu(\mu-1)$$
$$+ \frac{1}{6}m^3\nu(\nu-1)(2\nu-1) + \frac{1}{2}m^2n(\nu-1)(2\nu-1)(\mu-1)$$
$$+ \frac{1}{2}mn^2(\nu-1)(\mu-1)(2\mu-1) + \frac{1}{6}n^3\mu(\mu-1)(2\mu-1).$$

Les points triples du lieu annulent une matrice de $\mu + \nu - 2$ colonnes, $\nu - 2$ lignes de formes d'ordre m, et $\mu - 2$ lignes de formes d'ordre n. Le nombre T de ces points triples se trouve par la méthode ou la formule du n° 5,

$$T = [m(\nu-2) + n(\mu-2)][m^2(\nu-2) + n^2(\mu-2)]$$
$$+ \frac{1}{6}m^3(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4) + \frac{1}{2}m^2n(\nu-2)(\nu-3)(\mu-2)$$
$$+ \frac{1}{2}mn^2(\nu-2)(\mu-2)(\mu-3) + \frac{1}{6}n^3(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4),$$

ou, après quelques calculs,

$$T = \frac{1}{6}m^3\nu(\nu-1)(\nu-2) + \frac{1}{2}m^2n(\nu-1)(\nu-2)(\mu-2)$$
$$+ \frac{1}{2}mn^2(\nu-2)(\mu-1)(\mu-2) + \frac{1}{6}n^3\mu(\mu-1)(\mu-2).$$

Par exemple, si l'on a $m = n = 1$, le lieu est une surface réglée d'ordre $\mu + \nu$ dont la courbe double est du degré

$$\frac{1}{2}[(\mu+\nu)^2 - 3(\mu+\nu) + 2] \text{ ou } \frac{1}{2}(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)$$

et de genre

$$1 - \nu(\nu-1) - 2(\nu-1)(\mu-1) - \mu(\mu-1) + \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(2\nu-1)$$
$$+ \frac{1}{2}(\nu-1)(2\nu-1)(\mu-1) + \frac{1}{2}(\nu-1)(\mu-1)(2\mu-1) + \frac{1}{6}\mu(\mu-1)(2\mu-1),$$

ou encore

$$1 + \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(2\nu-7) + (\nu-1)(\mu-1)(\mu+\nu-3) + \frac{1}{6}\mu(\mu-1)(2\mu-7).$$

Cette surface réglée a un nombre de points triples égal à

$$\frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu-2)+\frac{1}{2}(\mu-2)(\nu-2)(\mu+\nu-2)+\frac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2).$$

37. Pour qu'il puisse être question de deux racines en t communes aux équations $F=0$, $f=0$, il faut évidemment que, t entrant dans F à une puissance μ supérieure à 2, figure au moins dans f avec l'exposant 2. Car si f est linéaire en t, lorsque cette équation $f=0$ a deux racines, elle en a une infinité, et le nombre des racines communes en t est égal à μ; la courbe singulière est, non pas double, mais multiple, d'ordre μ.

Ainsi, lorsque l'on a $\mu=4$, $\nu=1$, $m=n=1$, le lieu est une surface réglée du cinquième ordre douée d'une droite quadruple. Au contraire, si $\mu=3$, $\nu=2$, $m=n=1$, le lieu est une surface réglée du cinquième ordre ayant une courbe double d'ordre 6 et de genre 3 avec un point triple (*)

Le cas où $\nu=1$ donne la solution du problème suivant. Soit $f+t\varphi=0$ l'équation d'un faisceau de surfaces d'ordre n. Le lieu des intersections de ces surfaces avec une de leurs surfaces covariantes, de degré m et contenant au degré μ les coefficients de $f+t\varphi$ et par suite t, est une surface d'ordre $m+n\mu$ ayant la courbe de base du faisceau donné comme courbe μ^{ple}. Si la surface covariante est la Hessienne, $\mu=4$, $m=4(n-2)$; comme une surface coupe sa Hessienne suivant sa courbe parabolique, on retrouve ce théorème connu : *Le lieu des points paraboliques des surfaces d'un faisceau d'ordre* n *est une surface d'ordre* $8(n-1)$ *ayant la courbe de base du faisceau donné comme courbe quadruple* (**).

Si $\nu=2$, $\mu>2$ et si m et n ont des valeurs quelconques, on trouve, suivant la méthode générale, l'ordre et le genre de la courbe double; mais lorsque l'équation $f=0$, quadratique en t, a trois racines, elle en a une infinité et, par suite, elle a μ racines

---

(*) Comp. H. Schwarz, *Journ. f. Math.*, 67.

(**) Comp. K. Doehlemann, *Math. Ann.*, t. XLI.

communes avec $F = 0$; la courbe présente alors n^3 points singuliers, non pas triples, mais multiples, d'ordre μ.

Par exemple, *le lieu des points paraboliques d'un système de surfaces défini par l'équation*

$$f + t\varphi + t^2\psi = 0,$$

d'ordre n, *est une surface d'ordre* $16(n-1)$ *douée d'une courbe double d'ordre* $8(9n^2 - 15n + 8)$ *et possédant* n^3 *points octuples, savoir les points communs aux surfaces* f, φ, ψ.

38. Nous dirons un mot des points cuspidaux ou points-pinces de la courbe double d'un lieu géométrique. Reprenons à cet effet les équations des deux courbes planes en ρ et θ

$$F(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho; t_0 + \theta) = 0,$$
$$f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho; t_0 + \theta) = 0,$$

rencontrées au n° 35. Poussons un peu plus loin le développement en série de Taylor :

$$F \equiv \rho\left(\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0}\right) + \theta\frac{dF}{dt_0} + \rho\theta\frac{d}{dt_0}\left(\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0}\right) + \frac{\theta^2 d^2F}{2\,dt_0^2} + \dots = 0,$$

$$f \equiv \rho\left(\lambda\frac{df}{dx_0} + \mu\frac{df}{dy_0} + \nu\frac{df}{dz_0}\right) + \theta\frac{df}{dt_0} + \rho\theta\frac{d}{dt_0}\left(\lambda\frac{df}{dx_0} + \mu\frac{df}{dy_0} + \nu\frac{df}{dz_0}\right) + \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2f}{dt_0^2} + \dots = 0.$$

Supposons que le point $A(x_0, y_0, z_0; t_0)$ soit un point double du lieu, les termes indépendants de ρ s'annulant dans les deux égalités précédentes, d'abord pour $\theta = 0$, ensuite pour $\theta = t_1$.

Cherchons les droites $d(\lambda, \mu, \nu)$ qui coupent le lieu en trois points coïncidents en A : les deux courbes planes par hypothèse ne se coupent pas une troisième fois sur l'axe des ρ, sinon A serait un point triple; il faut donc qu'elles se touchent, soit à l'origine, soit au point $\rho = 0$, $\theta = t_1$, ou que l'une d'elles ait un nœud en un de ces points; mais ce dernier cas rentre dans

le premier. Or, la condition d'un contact à l'origine est visiblement

$$\frac{\lambda\dfrac{dF}{dx_0}+\mu\dfrac{dF}{dy_0}+\nu\dfrac{dF}{dz_0}}{\lambda\dfrac{df}{dx_0}+\mu\dfrac{df}{dy_0}+\nu\dfrac{df}{dz_0}}=\frac{\dfrac{dF}{dt_0}}{\dfrac{df}{dt_0}}.$$

Pour avoir la condition d'un contact au point $\rho=0$, $\theta=t_1$, transportons-y l'origine en posant $\theta=t_1+\Theta$: les termes indépendants de ρ et Θ disparaissent des équations et les termes restants, de degré le moins élevé en ρ et Θ, s'écrivent sans peine et donnent pour condition de contact à la nouvelle origine

$$\frac{\left(1+t_1\dfrac{d}{dt_0}\right)\left(\lambda\dfrac{dF}{dx_0}+\mu\dfrac{dF}{dy_0}+\nu\dfrac{dF}{dz_0}\right)}{\left(1+t_1\dfrac{d}{dt_0}\right)\left(\lambda\dfrac{df}{dx_0}+\mu\dfrac{df}{dy_0}+\nu\dfrac{df}{dz_0}\right)}=\frac{\dfrac{dF}{dt_0}}{\dfrac{df}{dt_0}}.$$

Les deux égalités écrites en dernier lieu représentent, en λ, μ, ν, deux plans de la gerbe A; ces plans constituent le cône tangent au lieu géométrique en A. Pour que ces deux plans coïncident, il faut que le rapport

$$\frac{\left(\dfrac{dF}{dx_0}+t_1\dfrac{d^2F}{dx_0dt_0}\right)\dfrac{df}{dt_0}-\left(\dfrac{df}{dx_0}+t_1\dfrac{d^2f}{dx_0dt_0}\right)\dfrac{dF}{dt_0}}{\dfrac{dF}{dx_0}\dfrac{df}{dt_0}-\dfrac{df}{dx_0}\dfrac{dF}{dt_0}}$$

soit égal aux deux expressions analogues, où x_0 est remplacé par y_0 ou z_0; donc la quantité

$$t_1\frac{\dfrac{d^2F}{dx_0dt_0}\dfrac{df}{dt_0}-\dfrac{d^2f}{dx_0dt_0}\dfrac{dF}{dt_0}}{\dfrac{dF}{dx_0}\dfrac{df}{dt_0}-\dfrac{df}{dx_0}\dfrac{dF}{dt_0}}$$

doit être égale aux deux expressions analogues. Donc, ou bien t_1 est nul, ou bien deux égalités doivent être vérifiées par un ou plusieurs points doubles du lieu; comme ceux-ci ne sont qu'en nombre simplement infini, il y a généralement incompatibilité.

Réciproquement, si les deux courbes planes ont deux points communs infiniment voisins sur l'axe ρ, c'est-à-dire si elles ont, à l'origine, l'axe des ρ comme tangente commune, on a $\frac{dF}{dt_0} = \frac{df}{dt_0} = 0$. Supposons qu'elles n'aient pas d'autre point commun sur l'axe des ρ, donc que A soit double et non triple sur le lieu géométrique. Pour avoir les droites $d\,(\lambda, \mu, \nu)$ qui rencontrent le lieu en trois points coïncidents, ou le cône tangent de sommet A, il faut exprimer que les courbes planes ont, à l'origine, un contact du second ordre, ou bien que l'une d'elles y présente un nœud, et nous verrons que ce deuxième cas rentre dans le premier. Les équations des courbes planes sont réduites à

$$\rho\left(\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0}\right) + \rho\theta\frac{d}{dt_0}\left(\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0}\right) + \frac{\theta^2 d^2F}{2\,dt_0^2} = 0,$$

$$\rho\left(\lambda\frac{df}{dx_0} + \mu\frac{df}{dy_0} + \nu\frac{df}{dz_0}\right) + \rho\theta\frac{d}{dt_0}\left(\lambda\frac{df}{dx_0} + \mu\frac{df}{dy_0} + \nu\frac{df}{dz_0}\right) + \frac{\theta^2 d^2f}{2dt_0^2} = 0.$$

Il résulte de raisonnements que nous avons exposés dans une note *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (*), que ces deux courbes ont un contact du second ordre à l'origine quand on a

$$\frac{\lambda\dfrac{dF}{dx_0} + \mu\dfrac{dF}{dy_0} + \nu\dfrac{dF}{dz_0}}{\lambda\dfrac{df}{dx_0} + \mu\dfrac{df}{dy_0} + \nu\dfrac{df}{dz_0}} = \frac{\dfrac{d^2F}{dt_0^2}}{\dfrac{d^2f}{dt_0^2}}.$$

Cette équation représente l'ensemble des droites issues de A ayant un contact triponctuel avec le lieu géométrique; comme elle est du premier ordre, le point est un point uniplanaire, ou cuspidal, ou point-pince de la courbe double du lieu. Si l'une des courbes planes, $F(\theta, \rho)$ par exemple, avait, à l'origine, un nœud dont une des tangentes serait l'axe des θ, on aurait

$$\lambda\frac{dF}{dx_0} + \mu\frac{dF}{dy_0} + \nu\frac{dF}{dz_0} = \frac{d^2F}{dt_0^2} = 0,$$

ce qui est un cas particulier de l'égalité précédente.

(*) *Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1897.

Il est donc démontré que *l'on a en général tous les points-pinces de la courbe double d'un lieu géométrique ayant pour génératrices* $F(x, y, z; t) = 0$ *et* $f(x, y, z; t) = 0$ *en écrivant les conditions pour que ces équations soient vérifiées par deux valeurs infiniment voisines de* t, *ou les conditions pour que les équations*

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad f = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0$$

aient une racine commune en t. Ces conditions étant au nombre de trois, il y a généralement un nombre fini de ces points cuspidaux. Toutefois, dans des problèmes particuliers, il peut arriver que la méthode indiquée ne fournisse pas tous ces points.

Le problème des enveloppes.

39. La question de l'enveloppe d'une surface variable dépendant d'un seul paramètre t se ramène au problème du lieu géométrique, avec une modification qu'il faut rappeler, encore qu'elle soit bien connue.

L'équation de l'enveloppe résulte de l'élimination ordinaire de t entre les égalités

$$F(x, y, z; t) = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

la première contient par exemple t à la puissance μ et la seconde à la puissance $\mu - 1$. Il est donc clair que l'on peut remplacer la première par $\mu F - t\frac{dF}{dt} = 0$, ce qui ramène à un système de deux équations du degré $\mu - 1$ en t.

La courbe singulière se trouve encore en exprimant que ces deux égalités sont vérifiées pour deux valeurs de t, les points triples en écrivant qu'elles ont trois racines communes en t; mais pour les points cuspidaux la question change, car, au lieu de quatre équations en t, il n'y en a évidemment que trois, savoir :

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{d^2F}{dt^2} = 0,$$

de sorte que les points cuspidaux sont en nombre infini et engendrent une courbe, la courbe cuspidale, faisant d'ailleurs partie de la courbe singulière.

Bien entendu, le système ci-dessus se ramène à trois équations de degré $\mu - 2$ en t. La matrice que l'on obtient en éliminant t contient des éléments identiquement nuls. Il faut donc prendre, dans l'interprétation, les précautions indiquées au n° 33.

40. Résolvons un problème particulier très simple : cherchons l'enveloppe d'un plan variable représenté par l'équation

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0,$$

où a, b, c, d, e sont des formes linéaires. Cette enveloppe est donc la développable unicursale de quatrième classe.

On obtient l'ensemble de la courbe nodale et de la courbe cuspidale en écrivant les conditions pour que les équations

$$\begin{aligned} 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d &= 0, \\ bt^3 + 2ct^2 + 3dt + 4e &= 0, \end{aligned}$$

aient deux racines communes; ces conditions peuvent s'écrire

$$\left\| \begin{matrix} & 4a & 3b & 2c & d \\ 4a & 3b & 2c & d & \\ b & 2c & 3d & 4e & \\ & b & 2c & 3d & 4e \end{matrix} \right\| = 0.$$

On a ainsi la représentation d'une courbe, ou plutôt de deux courbes, d'ordre total 10.

Les points triples, au nombre de quatre, sont donnés par

$$\left\| \begin{matrix} 4a & 3b & 2c & d \\ b & 2c & 3d & 4e \end{matrix} \right\| = 0.$$

Pour avoir les équations de la courbe cuspidale, ou arête de rebroussement, seule, il faut écrire les conditions d'existence d'une racine commune aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 12at^2 + 6bt + 2c &= 0, \\ 3bt^2 + 4ct + 3d &= 0, \\ 2ct^2 + 6dt + 12e &= 0. \end{aligned}$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$\begin{Vmatrix} 6a & & & & c \\ 3b & 6a & 3b & c & 3d \\ c & 3b & 4c & 3d & 6e \\ & c & 3d & 6e & \end{Vmatrix} = 0.$$

C'est encore la représentation d'un système de courbes, d'ordre total 10; d'après le n° 33, il faut en défalquer la droite $a = c = o$ et la cubique gauche

$$\begin{Vmatrix} 6a & 3b & c \\ c & 3d & 6e \end{Vmatrix} = 0.$$

La courbe cuspidale est donc du sixième ordre et, par suite, la courbe nodale est du quatrième.

Multisécantes des courbes rationnelles.

41. Bien que dans les lignes précédentes la question de l'élimination ne soit pas encore assez approfondie pour que nous puissions résoudre les problèmes généraux sur les multisécantes, il convient de poser ici ces problèmes et de traiter les cas particuliers qui nous sont déjà accessibles.

Soient $u_x = 0$, $v_x = 0$ les équations de deux plans quelconques et

$$\rho x_i = \varphi_i t \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations paramétriques d'une courbe rationnelle, les formes φ étant des fonctions entières du n^e ordre en t. Dans les équations des deux plans, remplaçons les x_i par $\varphi_i t$; nous obtiendrons des égalités telles que

$$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$
$$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \ldots + B_n = 0,$$

où les coefficients A et B sont des formes linéaires, respectivement en u et en v.

Si ces deux équations ont deux racines communes, l'intersec-

tion des plans u et v est une bisécante de la courbe et réciproquement. Or, dans ce cas, les variables u_i et v_i annulent une matrice M à $2n - 1$ colonnes et $2n - 2$ lignes, dont les $n - 1$ premières sont des formes linéaires en u et les autres des formes linéaires en v.

On peut dire que $M = 0$ représente la congruence des bisécantes de la courbe donnée encore que ces bisécantes ne soient pas explicitement représentées par leurs coordonnées Pluckériennes. Au moins la matrice peut être précédée d'une ligne de constantes arbitraires et les ∞^{2n-1} complexes d'ordre $n - 1$ qui annulent ce déterminant peuvent s'écrire en coordonnées-lignes $u_i v_k - u_k v_i$, puisque le déterminant est symétrique en u et v.

Si les deux équations précédentes ont trois racines communes, la droite (uv) est une trisécante : les u et les v annulent une matrice N à $2n - 2$ colonnes, $n - 2$ lignes de formes en u et $n - 2$ lignes de formes en v. Pour avoir l'équation, en coordonnées tangentielles u, de la surface des trisécantes, il faudrait pouvoir éliminer, des éléments d'une matrice égalée à zéro, certains paramètres, au moins quand ces paramètres figurent au premier degré dans les éléments de la matrice. Ce problème d'ailleurs finit toujours par se poser quand on poursuit les applications de la théorie des matrices. Les cas les plus simples de cette question seront examinés dans la suite de ce travail.

Si enfin les équations précédentes ont quatre racines communes, la droite (uv) est une quadrisécante et les u et les v annulent une matrice à $2n - 3$ colonnes et $2n - 6$ lignes.

42. Supposons que le plan u_x passe par un point fixe, de même que v_x, que l'on ait donc, par exemple,

$$u_x \equiv \lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x,$$
$$v_x \equiv \lambda' a'_x + \mu' b'_x + \nu' c'_x,$$

$\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ étant des paramètres variables. Alors les matrices M et N du numéro précédent ont, pour la moitié de leurs lignes, des formes en λ, μ, ν et pour le reste des formes en λ', μ', ν'.

L'élimination de λ', μ', ν', si nous savions l'effectuer dans la matrice N, donnerait l'équation en λ, μ, ν du cône de sommet (abc) circonscrit à la surface des trisécantes.

Quant à la notation $M = 0$, elle exprimerait la correspondance entre deux gerbes dont les éléments homologues seraient astreints à se couper suivant une bisécante d'une courbe gauche rationnelle donnée. Dans ce cas, si v_x décrivait un simple faisceau, c'est-à-dire si ν' était nul, l'élimination de $\lambda' : \mu'$ donnerait l'équation du cône de sommet (abc) circonscrit à la surface engendrée par les bisécantes de la courbe gauche donnée γ_n qui s'appuient sur une droite donnée (a', b').

Quittons ces problèmes à solution conjecturale et supposons que λ', μ', ν' soient identiques à λ, μ, ν; en d'autres termes, que u et v soient deux plans homologues de deux gerbes projectives, ou que leur intersection soit une bisécante d'une cubique gauche γ_3. Alors $M = 0$ représente, λ, μ, ν étant les variables, un nombre fini de plans qui projettent du point (abc) les bisécantes communes à la cubique γ_3 et à la courbe donnée γ_n. On trouve ainsi sans peine la vérification de la formule connue sur le nombre des bisécantes communes aux deux courbes; on a, de plus, une représentation analytique, donc une connaissance plus précise, de ces droites.

Supposons ensuite que les équations $u_x = 0$ et $v_x = 0$ soient de la forme

$$u_x \equiv \lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x + \pi d_x,$$
$$v_x \equiv \lambda a'_x + \mu b'_x + \nu c'_x + \pi d'_x;$$

alors u et v sont des plans homologues de deux espaces projectifs et leur intersection est un rayon d'un complexe tétraédral. $M = 0$ représente alors, λ, μ, ν, π étant des coordonnées de plan, une développable circonscrite à la surface engendrée par les bisécantes de la courbe gauche donnée, qui appartiennent à un complexe tétraédral; $N = 0$ représente un nombre fini de plans passant par des trisécantes de la courbe gauche, appartenant à un complexe tétraédral. La classe de cette développable est $(n - 1)(2n - 1)$ et le nombre de ces trisécantes

est $\frac{1}{6}(2n-4)(2n-3)(2n-2)$, d'où il faut défalquer les quatre plans principaux du complexe.

On verra plus loin une autre manière d'aborder le problème des multisécantes des courbes rationnelles et d'autres lignes.

Coniques multisécantes des courbes gauches.

43. Dans une note *Sur les plans qui coupent, en des points d'une conique, un système de lignes de l'espace* (*), nous avons utilisé la théorie de la surélimination pour trouver l'enveloppe des plans des coniques qui coupent six fois certains systèmes de courbes gauches. Ces enveloppes sont des surfaces représentées par l'évanouissement de déterminants. Si, au lieu de six points d'appui de la conique variable, nous supposons qu'il y en ait sept, l'enveloppe sera une développable, et nous allons exposer une couple d'exemples où cette développable est représentée, en coordonnées tangentielles, par l'évanouissement d'une matrice.

Considérons un réseau de quadriques,

$$\Sigma \equiv \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0,$$

et une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre c_4,

$$\rho x_i = \varphi_i(t).$$

Remplaçons dans l'équation $\Sigma = 0$ les x_i par $\varphi_i(t)$; nous obtenons une égalité de la forme

$$A_0 t^8 + A_1 t^7 + \cdots + A_8 = 0,$$

où les A sont des formes linéaires en λ_1, λ_2, λ_3. Un plan $u_x = 0$ donne de même

$$B_0 t^4 + B_1 t^5 + \cdots + B_4 = 0,$$

les B étant des formes linéaires en u_1, u_2, u_3, u_4.

(*) *Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1902.

Les conditions pour que les deux dernières équations aient quatre racines communes s'écrivent

$$M \equiv \begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & & & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & & & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & & \\ & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \\ & & & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

L'élimination des λ contenus dans les formes A donne les équations, en u, de l'enveloppe des plans qui coupent c_4 en quatre des points où cette courbe est rencontrée par une surface du réseau Σ.

Nous sommes de nouveau ramené à une élimination de paramètres entre les éléments d'une matrice. Mais, comme les λ ne figurent que dans une ligne, la solution est immédiate : on peut faire précéder la matrice M de deux lignes d'éléments quelconques; la matrice Δ obtenue de cette manière est toujours nulle en même temps que M. Choisissons les éléments de ces deux lignes de manière qu'en multipliant ceux de la première par λ_1, ceux de la seconde par λ_2 et retranchant de la ligne des A, les termes en λ_1 et λ_2 se détruisent; on peut alors diviser par λ_3, et les λ sont éliminés. La matrice Δ possède alors neuf colonnes et huit lignes, dont les trois premières sont formées de constantes et les cinq dernières de fonctions linéaires en u. Son évanouissement représente une développable de quinzième classe, forme corrélative d'une courbe du quinzième ordre que nous avons étudiée plus haut.

Si les surfaces du réseau Σ ont en commun une cubique gauche pouvant dégénérer en une conique et une droite ou en trois droites, on voit que *les plans des coniques qui s'appuient par quatre points sur une biquadratique rationnelle et par trois points sur une cubique gauche, peut-être dégénérée, enveloppent une développable de quinzième classe, représentée par* $\Delta = 0$.

Un faisceau de quadriques et une cubique gauche donnent

lieu à un problème analogue, mais plus simple, dont le résultat est le suivant : *Les plans des coniques qui s'appuient par quatre points sur une biquadratique de première espèce et par trois points sur une cubique gauche enveloppent une développable de dixième classe, représentée par l'évanouissement d'une matrice.*

Si l'on veut combiner le réseau ou le faisceau de quadriques avec une courbe rationnelle d'ordre n plus élevé que le troisième ou le quatrième, les paramètres à éliminer figurent dans plus d'une ligne de la matrice et l'on est ramené à des questions d'algèbre que nous n'avons pas encore exposées.

Élimination de deux ou plusieurs inconnues.

44. Considérons d'abord un cas particulier très simple : soient les équations

$$F_i \equiv a_i xy + b_i x + c_i y + d_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Cherchons la condition pour qu'elles soient vérifiées par un même système de valeurs de x et y. Ainsi posée, la question signifie que le système de racines doit se composer de valeurs finies de x et y, car les équations représentent, dans un même plan, trois coniques ayant mêmes directions asymptotiques, donc ayant deux points communs à l'infini sur les axes, quels que soient les coefficients. On demande donc la condition pour que ces trois courbes aient un troisième point commun à distance finie (s'il est à l'infini, les trois courbes doivent y être tangentes). Soient X et Y les coordonnées de ce point, on aura

$$\left.\begin{aligned} a_i XY + b_i X + c_i Y + d_i &= 0 \\ a_i X^2 Y + b_i X^2 + c_i XY + d_i X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ & & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & & \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si ce déterminant est nul, il existe une même relation linéaire entre les termes de chaque colonne; par exemple

$$\begin{aligned}
\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 &= 0,\\
\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 &= 0,\\
\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_3 c_3 &= 0,\\
\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 &= 0,\\
\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 &= 0,\\
\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 &= 0;
\end{aligned}$$

d'où, en multipliant respectivement par x^2y, x^2, xy, x, y, 1, et additionnant, on a, quels que soient x et y,

$$\Sigma\lambda_i(a_i xy + b_i x + c_i y + d_i) + \Sigma\mu_i(a_i x^2 y + b_i x^2 + c_i xy + d_i x) = 0,$$

ou

$$(\lambda_1 + \mu_1 x)\mathrm{F}_1 + (\lambda_2 + \mu_2 x)\mathrm{F}_2 + (\lambda_3 + \mu_3 x)\mathrm{F}_3 = 0.$$

Tout point commun à F_1 et F_2 doit annuler $(\lambda_3 + \mu_3 x)\mathrm{F}_3$; or, la droite $\lambda_3 + \mu_3 x = 0$ ne peut contenir que deux points communs à F_1 et F_2, dont un à l'infini; donc un point commun à distance finie de F_1 et F_2 doit être sur F_3.

Après avoir écrit la condition d'existence d'un système de racines communes aux trois équations, cherchons les conditions d'existence de deux systèmes pareils. Elles s'écrivent

$$\| a_i \; b_i \; c_i \; d_i \|_1^3 = 0.$$

Car, si les points communs aux trois courbes F_1, F_2, F_3 ont pour coordonnées X, Y et X′, Y′, les équations linéaires

$$a_i\xi_1 + b_i\xi_2 + c_i\xi_3 + d_i\xi_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont vérifiées pour deux systèmes de valeurs des ξ, savoir XY, X, Y, 1 et X′Y′, X′, Y′, 1, donc elles le sont pour une infinité de systèmes et la matrice des coefficients s'annule. Réciproquement, si cette matrice est égale à zéro, il existe une même relation linéaire entre les éléments de chaque colonne, donc les courbes F_i font partie d'un même faisceau et possèdent

quatre points communs, dont deux à l'infini et deux autres généralement à distance finie.

Il n'y a pas de difficulté essentielle à étendre ces considérations à plus de deux variables, même si ces variables ont des exposants plus élevés. Mais en prenant un cas trop général, on a l'inconvénient de notations incommodes sans la compensation de résultats intéressants. Mieux vaut indiquer quelques problèmes particuliers exigeant des éliminations de ce genre.

45. La question spéciale résolue dans le numéro précédent se présente quand on cherche la bisécante menée d'un point donné P à une cubique gauche définie par les équations

$$-k = \frac{a_x}{a'_x} = \frac{b_x}{b'_x} = \frac{c_x}{c'_x}.$$

Soient y_i les coordonnées du point P; il faudra, dans les équations, remplacer x_i par $x_i + ty_i$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} a_x + ka'_x + ta_y + tka'_y &= 0, \\ b_x + kb'_x + tb_y + tkb'_y &= 0, \\ c_x + kc'_x + tc_y + tkc'_y &= 0. \end{aligned}$$

Si la droite (xy) est une bisécante, ces trois égalités sont vérifiées pour deux systèmes de valeurs de t et k, et l'on a

$$\begin{Vmatrix} a_x & a'_x & a_y & a'_y \\ b_x & b'_x & b_y & b'_y \\ c_x & c'_x & c_y & c'_y \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette notation représente une droite, toujours réelle, si la cubique et le point P sont réels, mais les appuis A et B de la bisécante peuvent être imaginaires conjugués. En tout cas, le produit PA $\times$ PB est réel et peut s'appeler la *puissance* du point P par rapport à la cubique gauche.

Pour exprimer commodément cette puissance, il convient de prendre des coordonnées cartésiennes rectangulaires, de remplacer donc x_1, x_2, x_3, x_4 par x, y, z, 1, d'appeler x', y', z' les

coordonnées de P et l, m, n les coefficients de direction de la bisécante.

Les coordonnées d'un point de la bisécante seront

$$x' + tl, \quad y' + tm, \quad z' + tn.$$

Alors, en désignant $a_1x' + a_2y' + a_3z' + a_4$ par $a_{x'}$; $a_1l + a_2m + a_3n + 0$ par a_l, etc., on voit que l'évanouissement de la matrice précédente équivaut aux deux relations linéaires en l, m, n :

$$\begin{vmatrix} a_l & a_{x'} & a'_{x'} \\ b_l & b_{x'} & b'_{x'} \\ c_l & c_{x'} & c'_{x'} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a'_l & a_{x'} & a'_{x'} \\ b'_l & b_{x'} & b'_{x'} \\ c'_l & c_{x'} & c'_{x'} \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire l, m, n proportionnels à des fonctions quadratiques des déterminants $(b_{x'}c'_{x'} - b'_{x'}c_{x'})$ ou (bc), $(c_{x'}a'_{x'} - c'_{x'}a_{x'})$ ou (ca), $(a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'})$ ou (ab); donc ces fonctions sont du quatrième degré en x', y', z' et l'on a, par exemple,

$$l : m : n = f_4(x', y', z') : \varphi_4(x', y', z') : \psi_4(x', y', z').$$

Comme on a aussi $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, on obtient les valeurs absolues de l, m, n.

Les distances PA, PB sont les valeurs de t qui satisfont aux trois équations en t et k de plus haut, ou à deux d'entre elles, puisque la troisième est une combinaison linéaire des deux autres. Deux de ces équations peuvent s'écrire, avec les nouvelles notations,

$$a_{x'} + ka'_{x'} + ta_l + tka'_l = 0,$$
$$b_{x'} + kb'_{x'} + tb_l + tkb'_l = 0.$$

L'élimination de k donne une relation où le terme en t^2 est $t^2(a_lb'_l - a'_lb_l)$ et le terme indépendant de t est $a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'}$. Le produit PA × PB ou la puissance π cherchée est donc

$$\pi = \frac{a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'}}{a_lb'_l - a'_lb_l}.$$

En d'autres termes, quand la matrice

$$\| \quad a_l \quad a'_l \quad a_{x'} \quad a'_{x'} \quad \|$$

est nulle, il existe un rapport constant entre un mineur formé de quatre éléments des deux dernières colonnes et le mineur correspondant formé dans les deux premières colonnes. C'est ce rapport constant qui est la puissance du point P.

L'égalité ci-dessus, donnant la valeur de π, peut être rendue homogène en l, m, n de la manière suivante

$$(a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'})(l^2 + m^2 + n^2) = \pi(a_l b'_l - a'_l b_l);$$

en y remplaçant l, m, n par les formes proportionnelles f, φ, ψ, on a l'égalité

$$(a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'})(f^2 + \varphi^2 + \psi^2) = \pi(a_f b'_f - a'_f b_f),$$

qui est, en apparence, du dixième ordre. Mais la dernière parenthèse contient toujours la première comme facteur.

En effet, supposons que le point P (x', y', z') se trouve sur la quadrique $a_x b'_x - a'_x b_x = 0$ circonscrite à la cubique, et cherchons les intersections de cette quadrique avec la droite (l, m, n) bisécante de la courbe; on a une équation du second degré en t, dont le terme en t^2 et le terme indépendant sont aussi

$$t^2(a_l b'_l - a'_l b_l) \text{ et } a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'}.$$

Or, la bisécante est tout entière sur la quadrique en question, les coefficients de cette équation sont tous nuls; ainsi tout point qui annule $a_{x'}b'_{x'} - a'_{x'}b_{x'}$ annule aussi $a_l b'_l - a'_l b_l$, et la première de ces expressions est un diviseur de la seconde.

La relation donnant la puissance π se réduit donc à

$$f^2 + \varphi^2 + \psi^2 = \pi F_6,$$

et $F_6 = 0$ est le lieu des points de puissance infinie, donc l'ensemble des trois cylindres du second ordre circonscrits à la cubique; chaque point de la courbe annule donc trois facteurs de F_6. Mais chaque point de la courbe annule aussi les trois

déterminants (ab), (ca), (ab), annule donc deux facteurs dans f, φ, ψ et quatre facteurs dans f^2, φ^2, ψ^2.

Le lieu des points qui ont une puissance donnée par rapport à une cubique gauche est une surface du huitième ordre ayant la cubique comme courbe triple.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cubiques gauches est une surface du quatorzième ordre ayant chacune des cubiques comme courbe triple.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à une sphère et à une cubique gauche est une surface du huitième ordre ayant la cubique comme courbe triple.

Si sur chaque tangente à une cubique gauche, on prend, de part et d'autre du contact, une longueur donnée, les extrémités de ces segments décrivent une courbe du quatorzième ordre. En effet, cette courbe est l'intersection de la développable osculatrice et d'une surface du huitième ordre. Ces deux surfaces admettant la cubique comme courbe double et triple, l'ordre de la nouvelle courbe est $8 \times 4 - 3 \times 3 \times 2 = 14$.

46. De même que l'on a trouvé la bisécante menée d'un point P à une cubique gauche, on peut chercher aussi les bisécantes menées d'un point P à une courbe c_6 définie par

$$\| \quad a_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \quad \|_1^3 = 0.$$

Il suffit de remplacer x_i par $x_i + ty_i$, les coordonnées de P étant y_1, y_2, y_3, y_4; on a

$$\| \; a_x + ta_y \quad b_x + tb_y \quad c_x + tc_y \quad d_x + td_y \; \| = 0.$$

On a ici un de ces problèmes auxquels il a été fait allusion dans le paragraphe précédent : il faut éliminer un paramètre entre les éléments d'une matrice nulle. Il doit exister une même relation linéaire entre les éléments des quatre colonnes; on doit donc avoir la relation

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x + \lambda t a_y + \mu t a'_y + \nu t a''_y = 0$$

et trois équations analogues en b, c, d.

Si l'on élimine *simplement* λ, μ, ν, t, en écrivant la condition pour que ces quatre égalités admettent *un* système de racines communes, on a l'équation du cône de sommet y perspectif à la courbe c_6; ou, en considérant à la fois x et y comme variables, on a l'équation du complexe des droites qui rencontrent une fois c_6.

Pour faire cette élimination, on muliplie par t et par t^2, et l'on a douze relations linéaires entre les douze inconnues homogènes λ, μ, ν, λt, μt, νt, λt^2, μt^2, νt^2, λt^3, μt^3, νt^3, ce qui donne un déterminant à douze lignes dont les éléments sont, par moitiés, des formes linéaires en x et des formes linéaires en y. Si l'on y fait $x_4 = 0$, ce qui revient à considérer les formes en x comme ternaires et les formes en y comme quaternaires, l'évanouissement de ce déterminant représente la projection, sur un plan, de la courbe donnée, le centre de projection étant le point y.

Si l'on veut obtenir les bisécantes issues du point y, on doit écrire les conditions pour que les équations en λ, μ, ν, t soient vérifiées par deux systèmes de valeurs de ces variables. On multiplie par t et l'on a huit équations homogènes en λ, μ, ν, λt, μt, νt, λt^2, μt^2, νt^2, qui doivent être vérifiées par deux systèmes, donc par ∞^1 systèmes de valeurs de ces quantités; on aura donc

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & & & & \\ b_x & b'_x & b''_x & b_y & b'_y & b''_y & & & & \\ c_x & c'_x & c''_x & c_y & c'_y & c''_y & & & & \\ d_x & d'_x & d''_x & d_y & d'_y & d''_y & & & & \\ & & & a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & \\ & & & b_x & b'_x & b''_x & b_y & b'_y & b''_y & \\ & & & c_x & c'_x & c''_x & c_y & c'_y & c''_y & \\ & & & d_x & d'_x & d''_x & d_y & d'_y & d''_y & \end{array} \right\| = 0.$$

Cette notation représente sept droites passant par y.

Pour que la droite (xy) soit trisécante, il faut, en vertu d'un raisonnement analogue à ce qui précède, que l'on ait

$$\| a_x \quad a'_x \quad a''_x \quad a_y \quad a'_y \quad a''_y \|_1^4 = 0.$$

L'évanouissement de cette matrice équivaut, si y n'est pas sur la courbe c_6, aux trois équations de plans

$$| a_x a_y a'_y a''_y |_1^4 = 0, \quad | a'_x a_y a'_y a''_y |_1^4 = 0, \quad | a''_x a_y a'_y a''_y |_1^4 = 0.$$

Ces plans ne se rencontrent généralement qu'en un point x, et celui-ci est visiblement identique à y, c'est-à-dire qu'en général il n'y a pas de trisécante par un point arbitraire, ce qui est évident.

En écrivant les conditions pour que les trois plans ci-dessus passent par une même droite, on a une matrice dont les éléments sont du troisième ordre en y et dont l'évanouissement représente la surface des trisécantes. En d'autres termes, les quatre déterminants extraits de cette matrice ont un facteur commun qui, égalé à zéro, représente la surface des trisécantes; les facteurs non communs sont y_1, y_2, y_3, y_4. Ce résultat est curieux, mais il paraît peu utile.

D'autre part, si la matrice

$$\| \quad a_x \quad a'_x \quad a''_x \quad a_y \quad a'_y \quad a''_y \quad \|,$$

trouvée plus haut, doit s'annuler pour des systèmes de valeurs *distincts* des x et des y, ce qui est la condition exigée pour l'existence d'une trisécante passant par y, il faut que les trois relations

$$\begin{aligned} ma_y + nb_y + pc_y + qd_y &= 0, \\ ma'_y + nb'_y + pc'_y + qd'_y &= 0, \\ ma''_y + nb''_y + pc''_y + qd''_y &= 0 \end{aligned}$$

soient vérifiées pour deux systèmes de valeurs des y ou que ces équations représentent trois plans passant par une même droite. C'est la confirmation d'un résultat trouvé au n° 12. L'équation de la surface des trisécantes résulterait de l'élimination de m, n, p, q entre deux des équations ci-dessus et la matrice, dont l'évanouissement exprime que ces trois égalités appartiennent à un même faisceau. Cette élimination est trop pénible pour trouver place ici.

Application à l'espace à quatre dimensions.

47. Si les éléments de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\|$$

sont des formes linéaires à cinq variables homogènes, l'évanouissement de cette matrice représente, dans l'espace à quatre dimensions, une surface du troisième ordre, Γ_3. Les équations

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = 0,$$
$$\lambda b_x + \mu b'_x + \nu b''_x = 0,$$

représentent ∞^2 plans dont chacun coupe par exemple l'hypersurface $a_x b'_x - a'_x b_x = 0$ suivant une conique située sur Γ_3. Par tout point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ passe le plan d'une telle conique.

Tout espace linéaire à trois dimensions, par exemple $x_5 = 0$, coupe Γ_3 suivant une cubique gauche. Pour les espaces linéaires dont l'équation a la forme

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = k(\lambda b_x + \mu b'_x + \nu b''_x),$$

et qui sont en nombre ∞^3, la cubique dégénère en une conique et une droite, cette dernière représentée par

$$a_x : b_x = a'_x : b'_x = a''_x : b''_x = k.$$

Si l'on projette Γ_3 d'un point fixe y, ce qui revient à remplacer x par $x + ty$, on a

$$\left\| \begin{matrix} a_x + ta_y & a'_x + ta'_y & a''_x + ta''_y \\ b_x + tb_y & b'_x + tb'_y & b''_x + tb''_y \end{matrix} \right\| = 0.$$

Si l'on coupe ensuite par un espace linéaire à trois dimensions, par exemple $x_5 = 0$, ce qui revient à considérer les formes en x comme quaternaires, tandis que les formes en y restent quinaires, on a, en éliminant t, la projection de Γ_3 dans l'espace

ordinaire. Or, l'évanouissement de la dernière matrice équivaut au système d'équations

$$\begin{aligned} a_x + ta_y + \varphi b_x + t\varphi b_y &= 0, \\ a'_x + ta'_y + \varphi b'_x + t\varphi b'_y &= 0, \\ a''_x + ta''_y + \varphi b''_x + t\varphi b''_y &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination simple de t et de φ donne

$$S_3 \equiv \begin{vmatrix} a_x & b_x & a_y & b_y & & \\ a'_x & b'_x & a'_y & b'_y & & \\ a''_x & b''_x & a''_y & b''_y & & \\ & & a_x & b_x & a_y & b_y \\ & & a'_x & b'_x & a'_y & b'_y \\ & & a''_x & b''_x & a''_y & b''_y \end{vmatrix} = 0;$$

on pourrait développer ce déterminant par le théorème de Laplace. $S_3 = 0$ représente une surface du troisième ordre douée d'une droite double :

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & a_y & b_y \\ a'_x & b'_x & a'_y & b'_y \\ a''_x & b''_x & a''_y & b''_y \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les coniques et les droites sur S_3 répondent aux cubiques dégénérées sur Γ_3; la droite double de S_3 et sa droite simple qui ne rencontre pas sa droite double répondent à la conique et à la droite de Γ_3 situées dans un même espace linéaire avec le centre de projection y.

48. Les formes a_x, b_x, ... étant linéaires à cinq variables homogènes, la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\|$$

s'annule pour les points d'une surface Γ_6 dans l'espace à quatre dimensions. C'est l'intersection partielle de deux espaces cubiques à trois dimensions, ayant encore en commun une surface du troi-

sième ordre Γ_3. Celle-ci coupe Γ_6 suivant une courbe du huitième ordre. En faisant précéder la matrice d'une colonne de constantes arbitraires, on a la représentation d'une double infinité de courbes du quatrième ordre situées sur Γ_6.

Si la relation

$$ma_x + nb_x + pc_x + qd_x = 0$$

et les deux analogues représentent trois espaces linéaires ayant un plan commun, ce plan coupe Γ_6 suivant une courbe du troisième ordre. Il existe dix plans pareils.

Projetons Γ_6 d'un point y, ce qui revient à remplacer x par $x + ty$; nous aurons, en éliminant t, puis en regardant les formes en x comme quaternaires, la projection de Γ_6 dans l'espace ordinaire. L'équation de cette projection est

$$S_6 \equiv \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

(dans ce déterminant nous avons remplacé, par une ligne de points, trois lignes de formes où les symboles b, c, d remplacent a). $S_6 = 0$ représente une surface du sixième ordre ayant une courbe double du septième degré représentée par

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & a_x & a'_x & a''_x & a_y & a'_y & a''_y \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| = 0,$$

et sur celle-ci un point triple défini par

$$\| \; a_x \;\; a'_x \;\; a''_x \;\; a_y \;\; a'_y \;\; a''_y \; \|_1^5 = 0.$$

49. Les formes a_x, b_x,... étant linéaires à cinq variables homogènes, l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \end{matrix} \right\|$$

représente une courbe du quatrième ordre, savoir la courbe normale de l'espace à quatre dimensions.

De même que précédemment, on trouve sa projection dans l'espace ordinaire en éliminant simplement t, φ entre la relation

$$a_x + \varphi a'_x + t a_y + t\varphi a'_y = 0$$

et les trois analogues, et en considérant les formes en x comme quaternaires, tandis que les formes en y restent quinaires. On trouve, pour résultat de l'élimination,

$$C \equiv \begin{Vmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x & & & \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x & & & \\ a_y & b_y & c_y & d_y & b_x & c_x & d_x \\ a'_y & b'_y & c'_y & d'_y & b'_x & c'_x & d'_x \\ & & & & b_y & c_y & d_y \\ & & & & b'_y & c'_y & d'_y \end{Vmatrix} = 0.$$

Il est évident que la projection, dans l'espace ordinaire, de la courbe normale de l'espace à quatre dimensions, est une biquadratique rationnelle. M. Marletta (*) est parti de cette propriété pour exposer la théorie de la courbe gauche rationnelle du quatrième ordre.

Ainsi, bien que nous ayons reconnu précédemment que cette courbe ne peut pas être représentée par une matrice dont les éléments seraient des formes indépendantes et les plus générales de leur ordre, il appert, par notre dernier résultat, que cette même figure peut annuler une matrice dont les éléments sont, les uns nuls, les autres des formes ayant des relations identiques entre elles.

Ici la biquadratique apparaît comme l'intersection partielle d'une surface cubique, annulant le déterminant des six dernières colonnes de C et d'une quadrique

$$\begin{vmatrix} a_x & a'_x & a_y & a'_y \end{vmatrix}^4_1 = 0;$$

(*) *Annali di matematica*, 1902.

ces deux surfaces ont en commun la droite

$$\left\| \begin{matrix} b_x & b'_x & b_y & b'_y \\ c_x & c'_x & c_y & c'_y \\ d_x & d'_x & d_y & d'_y \end{matrix} \right\| = 0,$$

laquelle est double sur la surface cubique et simple sur la quadrique.

50. Dans le présent paragraphe, nous n'avons fait qu'effleurer le sujet très vaste de l'application à l'espace à n dimensions, des propriétés des matrices. A dessein, nous n'avons utilisé que les préliminaires algébriques exposés ici même. Mais ceux-ci ne sont que les premiers pas dans une voie sans bornes. Aussitôt que le nombre des dimensions de l'espace s'élève au-dessus de trois, d'autres problèmes d'algèbre se présentent dans les questions les plus diverses. Pour ne citer que les plus simples, il faudra étudier les matrices où la différence entre le nombre de colonnes et de lignes dépasse deux, puis il faudra s'occuper des systèmes de valeurs de variables qui annulent tous les premiers mineurs d'une matrice carrée ou rectangulaire, etc.

La solution et l'application de quelques-uns de ces problèmes se trouvent ci-après dans notre étude III.

Appendice.

51. Il est possible de trouver les équations de la tangente en un point d'une courbe représentée par l'évanouissement d'une matrice, au moins dans certains cas. Nous esquissons ici la méthode en prenant pour exemple la courbe c_6 annulant une matrice à trois lignes et quatre colonnes de formes linéaires quaternaires. Le système des surfaces cubiques circonscrites à cette courbe est représenté par l'équation suivante, où α, β, γ, δ sont des paramètres arbitraires,

$$F \equiv \left| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right| \equiv \left| \begin{matrix} \alpha & a_x & a'_x & a''_x \end{matrix} \right| = 0.$$

Les plans polaires d'un point y par rapport à ces surfaces ont pour équation

$$\Sigma x_i \frac{dF}{dy_i} \equiv | \alpha\, a_x\, a'_y\, a''_y | + | \alpha\, a_y\, a'_x\, a''_y | + | \alpha\, a_y\, a'_y\, a''_x |$$
$$\equiv | \alpha\, a_x\, a'_y\, a''_y | + | \alpha\, a'_x\, a''_y\, a_y | + | \alpha\, a''_x\, a_y\, a'_y | = 0.$$

Mais si le point y est sur la courbe c_6, la matrice qui la représente est nulle et les déterminants, tels que $(a'_y b''_y)$, formés avec des éléments de deux lignes, sont dans des rapports constants, $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\sigma}$, avec les déterminants correspondants, tels que $(a''_y b_y)$, $(a_y b'_y)$, pris dans deux autres lignes de la matrice. On a donc

$$\Sigma x_i \frac{dF}{dy_i} \equiv | \alpha \quad a_x + \rho a'_x + \sigma a''_x \quad a'_y \quad a''_y | = 0,$$

ou, en remplaçant ρ par $(a''_y b_y) : (a'_y b''_y)$ et σ par $(a_y b'_y) : (a'_y b''_y)$ dans toutes les colonnes, on trouve

$$\Sigma x_i \frac{dF}{dy_i} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ a_y & a'_y & a''_y \\ b_y & b'_y & b''_y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_x & b'_x & b''_x \\ a_y & a'_y & a''_y \\ b_y & b'_y & b''_y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_x & c'_x & c''_x \\ a_y & a'_y & a''_y \\ b_y & b'_y & b''_y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d_x & d'_x & d''_x \\ a_y & a'_y & a''_y \\ b_y & b'_y & b''_y \end{vmatrix} \\ a'_y & b'_y & c'_y & d'_y \\ a''_y & b''_y & c''_y & d''_y \end{vmatrix} = 0.$$

Malgré les quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ces plans ne forment qu'un faisceau dont l'axe est la tangente à la courbe c_6. En abrégeant un peu la notation, on peut représenter cette tangente par

$$\begin{Vmatrix} (a_x\, a'_y\, b''_y) & (b_x\, a'_y\, b''_y) & (c_x\, a'_y\, b''_y) & (d_x\, a'_y\, b''_y) \\ a'_y & b'_y & c'_y & d'_y \\ a''_y & b''_y & c''_y & d''_y \end{Vmatrix} = 0.$$

II

Congruences de variétés algébriques annulant des matrices.

Dans l'étude précédente, nous avons toujours pris pour éléments des matrices des formes à une seule série de variables. Nous étendons maintenant le champ de nos recherches en considérant deux séries indépendantes de variables, mais nous ne pouvons traiter avec quelque détail que les cas les plus simples.

Pour les développements ultérieurs, nous devons donner d'abord quelques éclaircissements sur les groupes de points annulant une matrice à une seule série de trois variables homogènes, ainsi que sur les matrices à une série de variables, qui s'annulent identiquement.

Ensuite, nous envisageons les matrices dont les formes sont homogènes à la fois en $x_1, x_2, x_3, \ldots x_d$ et en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; elles représentent des infinités doubles, ou congruences de variétés à $d-3$ dimensions dans l'espace à $d-1$ dimensions. Nous cherchons dans les hypothèses les plus faciles comment doivent se présenter les variables α pour qu'un système arbitraire de valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_d$ appartienne à une seule variété de la congruence. Les applications à l'espace ordinaire et au plan sont évidemment les plus intéressantes. Un exposé sommaire d'une partie de cette étude a été publié déjà par nous dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (13 novembre 1905) (*).

Groupes de points dans un plan.

1. Les éléments de la matrice

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} a_x^m & a_x'^m & a_x''^m \\ b_x^n & b_x'^n & b_x''^n \end{matrix} \right\|$$

étant des formes ternaires d'ordre m et n, nous avons montré

(*) [Voir aussi *Journ. f. Math*, 132.]

que cette matrice s'annule pour $m^2 + mn + n^2$ points du plan et que ces points sont communs aux courbes d'un *réseau*,

$$| \lambda \quad a_x^m \quad b_x^n |_4^3 = 0.$$

Les courbes de ce réseau sont d'ordre $m + n$. Leurs points communs peuvent être en nombre égal ou supérieur aux conditions indépendantes qui déterminent en général un *faisceau* de courbes; ce fait se produit quand on a

$$m^2 + mn + n^2 \geqslant \tfrac{1}{2}(m + n)(m + n + 3) - 1,$$

d'où, successivement,

$$m^2 + n^2 \geqslant 3(m + n) - 2,$$
$$m(m - 3) + n(n - 3) \geqslant -2.$$

Pour que cette relation soit satisfaite, il faut, si les nombres m et n sont tous deux différents de zéro, que l'un d'eux soit au moins 3. Si n est nul, c'est-à-dire si les éléments de la seconde ligne de M sont des constantes b, b', b'', le réseau ci-dessus est un faisceau, car trois des courbes qui le composent sont liées par la relation identique $| a_x^m bb | \equiv 0$; les m^2 points, annulant alors la matrice, sont en nombre supérieur aux conditions qui déterminent un faisceau quand $m \geqslant 3$.

Ainsi, *quand un au moins des nombres* m, n *dépasse* 2, *les points annulant* M *sont en nombre surabondant pour déterminer le système de courbes de degré le moins élevé passant par ces points.*

On ne saurait d'ailleurs prétendre que, dans le groupe de points annulant M, il y a nécessairement des points singuliers pour toutes les courbes circonscrites, car alors toute courbe de la forme $a_x^m b_x'^n - a_x'^m b_x^n = 0$ devrait présenter des singularités ponctuelles. Or, on sait que toute courbe (donc aussi une courbe non singulière) passant par toutes les intersections de $a_x^m = 0$ $b_x^n = 0$ peut prendre une équation de la forme ci-dessus.

2. Le résultat trouvé plus haut montre l'inexactitude du théorème énoncé par plusieurs auteurs dans les termes sui-

vants : Toutes les courbes qui passent par $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ points communs à deux courbes planes d'ordre m passent par les intersections restantes. Cette propriété est énoncée, sans restriction explicite, dans la plupart des manuels ; quelques-uns seulement font, dans le contexte, une vague allusion à des exceptions possibles.

L'erreur pourtant est manifeste, comme l'ont remarqué les créateurs de la *Géométrie sur une courbe :* il se peut que $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ points ne suffisent pas à déterminer un faisceau de courbes, parce que les équations exprimant ces conditions ne sont pas toujours indépendantes. L'erreur est surtout regrettable quand on fonde sur cette proposition inexacte, la théorie des *transformations Cremona ;* cette théorie est exacte néanmoins, mais par hasard, parce que les courbes fondamentales de ces transformations sont unicursales ; aussi les exposés qui prennent ce dernier fait pour point de départ sont sans reproche.

Nous devions faire ici cette remarque, parce que, dans la recherche des congruences linéaires de variétés algébriques, il y aura lieu d'éviter une faute de ce genre.

3. Pour généraliser les résultats précédents, considérons une matrice $\| a_{ik} \|$ à l lignes et $l+1$ colonnes de formes ternaires d'ordre p_i+q_k. Supposons les éléments rangés de telle façon que l'on ait $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots \geqslant p_l$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \dots \geqslant q_{l+1}$. La matrice s'annule pour un nombre de points égal à

$$\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p \Sigma q + \Sigma q_1 q_2.$$

Supposons en premier lieu que l'on ait

$$q_1 > q_2, \quad q_2 = q_3 = \dots = q_{s+2}, \quad q_{s+2} > q_{s+3};$$

faisons précéder la matrice d'une ligne d'éléments dont le premier est la forme la plus générale du degré $q_1 - q_2$ à coefficients arbitraires, les $s+1$ éléments suivants des constantes arbitraires, et les derniers éléments tous nuls ; nous avons ainsi un déterminant qui représente ∞^r courbes C, si nous posons

$$r = \tfrac{1}{2}(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2) + s.$$

Le nombre des points annulant la matrice est supérieur au nombre des conditions définissant ∞^r courbes C si l'on a

$$\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p \Sigma q + \Sigma q_1 q_2 + r > \tfrac{1}{2}(\Sigma p + \Sigma q - q_2)(\Sigma p + \Sigma q - q_2 + 3),$$

ou successivement

$$2\Sigma p^2 + 2\Sigma p_1 p_2 + 2\Sigma p \Sigma q + 2\Sigma q_1 q_2 + (q_1 - q_2)^2 + 3(q_1 - q_2) + 2 + 2s > (\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + 2\Sigma p \Sigma q - (2q_2 - 3)(\Sigma p + \Sigma q) + q_2^2 - 3q_2,$$

$$\Sigma p^2 - \Sigma q^2 + q_1^2 + (\Sigma p + \Sigma q - q_1)(2q_2 - 3) + 2 + 2s > 0.$$

Il est visible que cette inégalité est satisfaite pour des valeurs suffisamment grandes des nombres p et q; notamment, quand q_2 est égal ou supérieur à 3, la relation est vérifiée pour toutes les valeurs des p; lorsque q_2 est inférieur à 3, les plus petites valeurs possibles des nombres p se déterminent sans difficulté, mais cette analyse présente peu d'intérêt.

Supposons en second lieu que l'on ait

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_{s+1} > q_{s+2};$$

faisons précéder la matrice d'une ligne d'éléments dont les $s+1$ premiers sont des constantes arbitraires, les autres étant nuls; nous aurons un déterminant représentant ∞^s courbes C d'ordre $\Sigma p + \Sigma q - q_1$; les points annulant la matrice sont en nombre supérieur aux conditions définissant ∞^s courbes C quand on a

$$\Sigma p^2 + \Sigma p_1 p_2 + \Sigma p \Sigma q + \Sigma q_1 q_2 + s > \tfrac{1}{2}(\Sigma p + \Sigma q - q_1)(\Sigma p + \Sigma q - q_1 + 3),$$

d'où, après quelques calculs,

$$\Sigma p^2 - \Sigma q^2 + q_1^2 + (2q_1 - 3)(\Sigma p + \Sigma q - q_1) + 2s > 0.$$

Cette inégalité est encore satisfaite pour des valeurs suffisamment grandes des nombres p et q, et notamment pour toutes les valeurs des nombres p quand q_1 dépasse 2.

Évanouissement identique d'une matrice.

4. Nous aurons fréquemment à nous demander quand une matrice à deux lignes et trois colonnes de formes à une série de variables $x_1, x_2, \ldots x_d$ s'annule pour toutes les valeurs des

variables. Désignons chaque élément de la matrice par son degré,

$$\left\| \begin{matrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{matrix} \right\|,$$

et supposons, pour fixer les idées, que les nombres m, m', m'' soient supérieurs à n, n', n''; ces degrés sont naturellement tels que chaque déterminant extrait de la matrice soit une forme homogène en x_1, x_2, ... x_d.

Si n et n' ont un facteur commun k, posons symboliquement

$$n \equiv k(n - k), \quad n' \equiv k(n' - k);$$

le déterminant

$$mn' - m'n \equiv k[m(n' - k) - m'(n - k)]$$

doit s'annuler pour toutes les valeurs des variables. Or, tous les systèmes de valeurs en nombre ∞^{d-2} qui annulent $n' - k$, sauf ceux en nombre ∞^{d-3}, qui annulent aussi $n - k$, doivent annuler m'; donc $n' - k$ est un facteur de m' et l'on a symboliquement

$$m' \equiv (n' - k)\alpha, \quad m \equiv (n - k)\alpha.$$

Si alors h est le plus grand commun diviseur de k et n'', posons

$$k \equiv h(k - h), \quad n'' \equiv h(n'' - h),$$

d'où

$$n \equiv h(k - h)(n - k) \equiv h(n - h), \quad n' \equiv h(k - h)(n' - k) \equiv h(n' - h);$$

le déterminant $mn'' - m''n$ devient

$$(n - k)\alpha h(n'' - h) - m''h(k - h)(n - k) \equiv 0;$$

par suite, $\alpha(n'' - h)$ est identique à $m''(k - h)$ et, comme $k - h$ et $n'' - h$ n'ont que ∞^{d-3} systèmes de valeurs communes, on a

$$m'' \equiv \beta(n'' - h), \quad \alpha \equiv \beta(k - h),$$

d'où

$$m \equiv \beta(n - h), \quad m' \equiv \beta(n' - h).$$

Donc, *dans une matrice identiquement nulle à deux lignes et trois colonnes, si les éléments d'une ligne ont un facteur commun* h, *les éléments de l'autre ont un facteur commun* β *et, après*

suppression de ces facteurs, les éléments d'une ligne sont identiques aux éléments correspondants de l'autre.

Lorsque les éléments d'une ligne sont des formes du premier ordre, leur facteur commun est une forme linéaire ou une constante.

La matrice est encore identiquement nulle quand les éléments d'une ligne ou ceux de deux colonnes sont identiquement nuls, ou, enfin, quand les éléments d'une colonne sont nuls et que, dans le déterminant restant, il y a un facteur commun à chaque ligne et à chaque colonne. Il faut remarquer que ce sont là des cas particuliers se ramenant à l'énoncé général précédent par le principe de l'addition des lignes ou des colonnes. Toutefois, la présente remarque est utile seulement dans le cas d'une seule série de variables x; quand nous aurons à considérer des matrices à deux séries de variables, les cas particuliers signalés ici devront être examinés à part.

Congruences linéaires de variétés algébriques.

5. Soit d'abord le cas très général d'une matrice à l lignes et $l + 1$ colonnes de formes de degré quelconque en x_1, x_2, ... x_d, les coefficients de ces formes étant, à leur tour, fonctions, d'ordre quelconque aussi, de trois paramètres homogènes α_1, α_2, α_3; les degrés des éléments en x et en α doivent seulement être tels que tout déterminant extrait de la matrice soit une forme homogène en x et en α.

Pour chaque système de valeurs des paramètres α, la matrice égalée à zéro représente, en x_1, x_2, ... x_d, une variété algébrique à $d - 3$ dimensions dans l'espace à $d - 1$ dimensions; par exemple pour $d = 4$ c'est une courbe gauche, pour $d = 3$ un groupe de points dans un plan. Quand les paramètres α varient, on a donc un ensemble doublement infini ou une congruence de ces variétés. Si l'on donne au contraire un point x, c'est-à-dire un système de valeurs de x_1, x_2, ... x_d, la matrice s'annule pour un nombre fini μ de valeurs des paramètres α_1, α_2, α_3, ou, en d'autres termes, pour μ points α, car on peut regarder α_1, α_2, α_3 comme les coordonnées d'un point α dans un plan.

Ainsi la congruence considérée est, en général, d'ordre μ, c'est-à-dire que tout point x appartient à μ variétés de la congruence.

Si, parmi les μ points α répondant à un point quelconque x, il y en a s fixes pour tous les points x, et $\mu - s$ variables avec x, la congruence s'abaisse à l'ordre $\mu - s$, et réciproquement.

En particulier la congruence est linéaire ou du premier ordre quand, des μ points α, $\mu - 1$ sont fixes quel que soit x, et un seul variable avec x.

Ces points fixes peuvent évidemment coïncider entre eux, tous ou en partie. En faisant précéder la matrice d'une ligne de formes indépendantes des x et de degré le moins élevé possible en α, on obtient, comme au n° 3, des courbes C en α ; si un point fixe α est j^{uple} sur chacune de ces courbes, il compte pour j^2 points fixes α.

A première vue, ces raisonnements rappellent la théorie des *Transformations Cremona;* mais l'analogie n'est qu'apparente, car jusqu'ici rien ne vient limiter, dans un sens ou dans l'autre, le nombre des points fixes α. D'après les n^{os} 1 et 3, on ne peut affirmer que ces points fixes situés sur ∞^n courbes C impliquent un nombre de conditions inférieur ou égal au nombre de points indépendants qui définissent un tel système de courbes. On ne peut même pas affirmer que les points fixes multiples α doivent être en nombre tel que les courbes C ne dégénèrent pas. La seule chose à faire est de donner aux nombres de lignes et colonnes de la matrice et aux degrés des variables les valeurs les plus simples, et d'examiner ces cas un à un.

Paramètres intervenant au degré 1 ou 0.

6. La matrice étant encore à l lignes et $l + 1$ colonnes de formes a_{ik} contenant les variables $x_1, x_2, \ldots x_d$ au degré $r_i + s_k$ et les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ au degré un ou zéro, elle s'annule pour ∞^2 variétés algébriques. Si l'on a $d = 4$, $l = 2$ et si $r_i + s_k$ est toujours égal à 1, quels que soient i et k, la matrice s'annule pour ∞^2 cubiques gauches. Si l'on a $d = 3$, $l = 2$, $r_i + s_k = 1$, la matrice s'annule pour ∞^2 ternes de points dans un plan.

Lorsque les paramètres α ne figurent que dans une colonne, en faisant abstraction de cette colonne, on a un déterminant qui s'annule pour une hypersurface contenant toutes les ∞^2 variétés de la congruence; par un point de cette hypersurface, il passe en général ∞^1 variétés; mais par un point arbitraire hors de cette hypersurface, il ne passe aucune variété : on peut dire que la congruence est d'ordre zéro.

Lorsque les paramètres α ne figurent que dans une ligne ou dans deux colonnes, et ce au premier degré, la matrice, pour chaque point x, représente un seul point α; il n'est pas question de points fixes α et les systèmes de courbes C de tantôt sont des faisceaux de droites sans point fixe commun. La congruence, dans ce cas, est toujours linéaire. Si l'on se réduit à une matrice à deux lignes et trois colonnes de formes linéaires en x, on a les deux types suivants (*)

$$(\mathrm{I}) \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & a''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x + \alpha_3 g_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 f'_x + \alpha_3 g'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Paramètres linéaires dans tous les éléments.

7. Bornons-nous à la matrice à deux lignes et trois colonnes de formes d'ordre quelconque en x_1, x_2, ... x_d et linéaires en α_1, α_2, α_3,

$$\mathrm{M} \equiv \left\| \begin{matrix} \Sigma \alpha_i a_{1i} & \Sigma \alpha_i b_{1i} & \Sigma \alpha_i c_{1i} \\ \Sigma \alpha_i a_{2i} & \Sigma \alpha_i b_{2i} & \Sigma \alpha_i c_{2i} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les courbes C en α s'obtiennent en faisant précéder M d'une ligne de constantes et forment donc un réseau de coniques. Des trois points α répondant à chaque point x, deux doivent être

(*) Nous avons étudié en détail le premier de ces types dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, mai 1907.

fixes et simples sur les courbes C ; car, si un point α était double sur ces coniques, celles-ci n'auraient plus d'intersection variable.

Supposons d'abord les deux points fixes α distincts, et plaçons-les aux sommets $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_3$ du triangle de référence des α. Pour tout point x, la matrice M s'annule quand on y fait $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; ou inversement, quand α_1 et α_2 sont nuls, la matrice doit s'annuler pour tous les systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_d$; donc on a l'identité

$$N_3 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} \end{matrix} \right\| \equiv 0;$$

l'autre point fixe $\alpha_1\alpha_3$ donne de même

$$N_2 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Nous avons appris précédemment comment des matrices pareilles peuvent être identiquement nulles : les éléments d'une ligne doivent avoir un facteur commun dont le degré en x peut aller depuis zéro jusqu'au degré, le moins élevé en x, des éléments de M; les éléments de l'autre ligne ont aussi un facteur commun dont l'ordre se déduit du précédent, et les facteurs restants sont identiques par colonnes, à une même constante près. Les cas où les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont identiquement nuls ne doivent pas être considérés à part, parce que les éléments de N_2 ou N_3 sont, dans la matrice M, les coefficients des mêmes paramètres α_2 ou α_3 et qu'on peut donc, par addition de colonnes ou de lignes de M, ramener les cas d'éléments identiquement nuls dans une ligne ou colonne de N_2 (ou N_3) aux cas d'éléments identiques dans deux lignes ou colonnes.

Tous les cas où N_3 s'annule identiquement étant combinés, de toutes les manières possibles, avec les hypothèses analogues relatives à N_2, on obtient toutes les congruences linéaires des variétés considérées, en tant que les paramètres α sont linéaires partout et les deux points fixes α distincts.

Supposons ensuite que les courbes C aient deux points com-

muns infiniment voisins, c'est-à-dire qu'elles aient par exemple au point $\alpha_1\alpha_2$ la même tangente $\alpha_1 = 0$: les termes en α_3^2 et en $\alpha_2\alpha_3$ doivent manquer dans leurs équations, et l'on a d'abord

$$N_3 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} \end{matrix} \right\| = 0,$$

et ensuite

$$(P) \quad \begin{cases} a_{12}b_{23} + a_{13}b_{22} - a_{22}b_{13} - a_{23}b_{12} = 0, \\ a_{12}c_{23} + a_{13}c_{22} - a_{22}c_{13} - a_{23}c_{12} = 0, \\ b_{12}c_{23} + b_{13}c_{22} - b_{22}c_{13} - b_{23}c_{12} = 0. \end{cases}$$

Les diverses hypothèses qui annulent N_3 étant portées dans les identités (P), on analyse facilement tous les cas possibles pour que ces dernières soient satisfaites. Même pour des degrés relativement petits des formes en x_1, x_2, ... x_d, le nombre des combinaisons possibles est considérable.

8. Circonscrivons le problème en supposant que les formes a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} soient toutes linéaires en x_1, x_2, ... x_d. Les résultats que nous obtiendrons nous fourniront : pour $d = 4$, des congruences linéaires de cubiques gauches; pour $d = 3$, des congruences linéaires de triangles dans un plan.

Dans ce champ plus restreint, pour que N_3 s'évanouisse identiquement, il faut : ou bien que les éléments d'une ligne de N_3 soient identiques à des constantes près, alors il en est de même dans l'autre ligne et l'on peut, par soustraction, faire disparaître α_3 de deux colonnes de M; ou bien les éléments d'une ligne sont identiques, à une même constante près, aux éléments correspondants de l'autre ligne et, par soustraction, on fait disparaître α_3 d'une ligne de M. Dans le cas de deux points fixes α distincts, on combine ces hypothèses avec celles qui amènent l'évanouissement de N_2, et l'on a les cas suivants :

1° Le paramètre α_2 manque dans une ligne de M et α_3 dans l'autre, ce qui fournit le type que voici :

$$(III) \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_3 g_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_3 g'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_3 g''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Si la soustraction qui fait disparaître α_2 de la seconde ligne en faisait disparaître en même temps α_3, on se trouverait dans le cas du type (I) signalé au n° 6;

2° Les paramètres α_2 et α_3 manquent chacun dans deux colonnes, mais non dans les mêmes; c'est un cas particulier du type (II) du n° 6. Si α_2 et α_3 étaient absents des deux mêmes colonnes, on aurait la congruence d'ordre zéro signalée au n° 6;

3° Un paramètre manque dans une ligne et un autre dans deux colonnes; voici le type que l'on obtient alors :

$$\text{(IV)} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

9. Dans le cas des points fixes α coïncidents, on a encore $N_3 \equiv 0$, et l'on peut faire disparaître α_3 d'une ligne ou de deux colonnes :

1° Supposons la première de ces opérations possible et effectuée, donc $a_{23} \equiv b_{23} \equiv c_{23} \equiv 0$; les identités (P) deviennent

$$P_1 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{matrix} \right\| \equiv 0.$$

Si les éléments de chaque ligne de P_1 sont identiques à des constantes près, on peut, par soustraction de colonnes, ramener au type suivant, assez analogue, comme forme, au type (IV) :

$$\text{(V)} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Si les éléments de chaque colonne de P_1 sont identiques à une constante près, on obtient le symbole que voici :

$$\text{(VI)} \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 c'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_2 c''_x \end{matrix} \right\| = 0;$$

dans chaque colonne, le facteur de α_3 d'un élément est le même que le facteur de α_2 de l'autre, mais on ne peut plus simplifier par soustraction.

Si les éléments d'une ligne ou de deux colonnes de P_1 sont identiquement nuls, on retrouve des types déjà rencontrés;

2° Lorsque dans N_5 les éléments de deux colonnes peuvent être annulés, donc quand on a $b_{15} \equiv c_{15} \equiv b_{25} \equiv c_{25} \equiv 0$, les identités (P) deviennent

$$\left\| \begin{matrix} a_{13} & b_{12} & c_{12} \\ a_{23} & b_{22} & c_{22} \end{matrix} \right\| = 0$$

et tous les modes d'évanouissement identique de cette matrice ramènent à des types déjà signalés.

En résumé, *quand la matrice n'a que six éléments de formes linéaires et quand les paramètres n'y figurent qu'à la première puissance au plus, toutes les congruences linéaires se ramènent aux six types obtenus par l'analyse précédente.*

Paramètres affectés d'exposants supérieurs à 1.

10. Dans l'impossibilité de traiter la question d'une façon complète, nous examinerons brièvement quelques cas simples : la matrice est toujours à deux lignes et trois colonnes de formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Si les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ figurent au n^e degré dans une ligne, l'autre étant indépendante de ces paramètres, le nombre des points α répondant à chaque point x est n^2; les courbes C sont d'ordre n et forment faisceau; les points fixes α sont en nombre $n^2 - 1$. Écrivons la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(\alpha^n, x) & \varphi_2(\alpha^n, x) & \varphi_3(\alpha^n, x) \\ d_1(x) & d_2(x) & d_3(x) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Il ne peut être question que les formes d_i soient nulles ou identiques, car alors la formule ne représente plus un ensemble de variétés à $d - 3$ dimensions. Donc, pour les $n^2 - 1$ points fixes α, désignés séparément par A, B, C, ..., on doit avoir

$$\varphi_i(\mathrm{A}) \equiv k d_i, \quad \varphi_i(\mathrm{B}) \equiv k' d_i, \quad \ldots \quad (i = 1, 2, 3),$$

$k, k', \ldots$ étant des constantes qui, dans un cas particulier, peuvent être toutes identiquement nulles.

Peut-on former une fonction ψ du n^e ordre en α et indépendante des x, telle que l'on ait

$$\psi(A) = k, \quad \psi(B) = k', \quad \ldots ?$$

La forme ψ a $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients et les relations écrites en dernier lieu sont en nombre $n^2 - 1$; on pourra les vérifier par des valeurs convenables des coefficients si l'on a

$$n^2 - 1 \leqq \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

ou, successivement,

$$2n^2 - 2 \leqq (n+1)(n+2),$$
$$(n+1)(n-4) \leqq 0,$$

donc, enfin, si n est au plus égal à 4.

Lorsque la forme ψ peut ainsi être construite, on remplace la matrice donnée par

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_i - \psi(\alpha) d \\ d_i \end{matrix} \right\|_1^3$$

et les éléments de la première ligne s'annulent, quel que soit x, pour tous les points fixes A, B, ... Dans les éléments de cette ligne, le coefficient de chaque variable x_i est une forme du n^e degré en α passant par $n^2 - 1$ points fixes. Ces formes appartiennent à un réseau si $n = 2$ et, en général, à un faisceau pour $n = 3$ ou $n = 4$. Lorsque c'est un réseau, chaque élément de la première ligne de la matrice écrite à l'instant prend l'aspect que voici :

$$S(\alpha)\lambda_i(x) + T(\alpha)\mu_i(x) + U(\alpha)\nu_i(x);$$

on peut prendre pour paramètres S, T, U et *l'on est ramené au type* (I) du n° 6.

Quand, au lieu d'un réseau de courbes en α, on n'a qu'un faisceau, la matrice s'annule pour une infinité simple de variétés.

Pour n supérieur à 2, des congruences linéaires pourraient encore se ramener au type (I) si certains points fixes α étaient singuliers pour les courbes C. Pour n supérieur à 4, on conçoit

la possibilité de congruences linéaires échappant à cette réduction, mais l'existence de ces systèmes est néanmoins problématique.

Un raisonnement analogue à celui qu'on vient d'exposer s'applique au cas où deux colonnes de la matrice contiennent les paramètres α au degré n, tandis que la troisième colonne est indépendante de ces paramètres; certaines de ces congruences se ramènent au type (II) du n° 6.

11. Lorsque les paramètres α_1, α_2, α_3 figurent au second degré dans une ligne et au premier dans l'autre, les courbes C sont du troisième ordre et doivent avoir six points fixes, soit six points simples distincts ou non, soit un point double et deux points simples, lesquels peuvent coïncider entre eux ou avec le nœud. Dans chacun de ces cas, déjà nombreux, les hypothèses à combiner sont fort nombreuses aussi, d'autant plus qu'on ne peut espérer de réduction par soustraction des lignes.

Voici, à titre d'exemple, une congruence linéaire où les points fixes des cubiques C en α sont un nœud et deux points simples aux sommets du triangle de référence,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_2\alpha_3 a_x + \alpha_3\alpha_1 b_x + \alpha_1\alpha_2 c_x & \alpha_2\alpha_3 a'_x + \alpha_3\alpha_1 b'_x + \alpha_1\alpha_2 c'_x & \alpha_2\alpha_3 a''_x + \alpha_3\alpha_1 b''_x + \alpha_1\alpha_2 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 f'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_2 f''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

12. Voici encore une congruence linéaire remarquable. Il est clair que toute matrice contenant les paramètres α_1, α_2, α_3 au degré n dans tous les éléments, mais où α_3 manque dans une ligne et α_2 dans l'autre, et où les deux lignes ne diffèrent que par le nom des paramètres, représente une congruence de variétés algébriques dont l'ordre est $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. En effet, pour chaque point x, l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} f(\alpha_1, \alpha_2) & \varphi(\alpha_1, \alpha_2) & \psi(\alpha_1, \alpha_2) \\ f(\alpha_1, \alpha_3) & \varphi(\alpha_1, \alpha_3) & \psi(\alpha_1, \alpha_3) \end{matrix} \right\|$$

est précisément la condition pour que la courbe plane unicursale

$$X_1 : X_2 : X_3 = f(\alpha_1, \alpha_2) : \varphi(\alpha_1, \alpha_2) : \psi(\alpha_1, \alpha_2)$$

ait un point double; or une telle courbe a $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ nœuds. Si tous ces nœuds, sauf un, sont fixes, la congruence est linéaire.

En particulier, si $n=3$, la congruence est toujours linéaire.

Dans le dernier paragraphe de cette étude, nous montrerons une congruence de cubiques gauches se ramenant au type actuel. A part cet exemple, nous ne traiterons pas en détail les systèmes signalés dans le présent paragraphe et nous nous contenterons d'approfondir les six types indiqués aux n^{os} 6, 8, 9.

Points singuliers x dans les six types de congruences.

13. Appelons *point singulier* x un point x appartenant à une infinité simple de variétés de la congruence. Ces points sont en nombre simplement infini et il s'agit de déterminer la figure qu'ils engendrent. Esquissons la marche à suivre.

Soit la matrice

$$\| f_i(\alpha, x) \quad \varphi_i(\alpha, x) \|_1^5 = 0;$$

elle donne les trois équations

$$f_i(\alpha, x) + \rho\varphi_i(\alpha, x) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si x est un point singulier, ces relations sont vérifiées pour ∞^1 systèmes de valeurs de ρ, α_1, α_2, α_3, et réciproquement. Or ceci peut arriver de deux manières : ou bien ρ conserve la même valeur dans les ∞^1 systèmes et il suffit d'écrire que les trois dernières égalités sont indéterminées en α_1, α_2, α_3, en considérant ρ, non comme variable, mais comme une constante inconnue; ou bien ρ varie avec α_1, α_2, α_3 dans les ∞^1 systèmes et alors on doit chercher la condition pour que les égalités soient indéterminées en ρ, α_1, α_2, α_3.

14. Appliquons cette méthode au type (I) du n° 6 : l'équation

$$\alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x + \rho d_x = 0$$

et les deux analogues en a', b', ... a'', b'', ... sont indéterminées en ρ, α_1, α_2, α_3 quand on a

$$\| a_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \|_1^3 = 0,$$

ce qui représente une variété sextique à $d - 3$ dimensions.

Si ρ est une constante inconnue, on peut poser $\rho = \rho_1 : \rho_2$ et les équations sont indéterminées en α_1, α_2, α_3 quand on a

$$\| \rho_2 a_x \quad \rho_2 b_x \quad \rho_2 c_x \quad \rho_1 d_x \|_1^3 = 0.$$

Ces relations sont vérifiées :

1° Pour $\rho_1 = 0$ et $(abc) = 0$, mais alors les équations déterminent les rapports mutuels de α_1, α_2, α_3; de sorte que, pour une indétermination de ces rapports, il faut l'évanouissement de tous les premiers mineurs de (abc); ceci arrive pour les points d'une variété algébrique à $d - 5$ dimensions, en supposant que d soit au moins égal à 5;

2° Pour $\rho_2 = 0$ et $d_x = d'_x = d''_x = 0$, conditions compatibles seulement quand le nombre des variables x est au moins quatre, et alors α_1, α_2, α_3 sont complètement indéterminés, c'est-à-dire que les points x communs à d_x, d'_x, d''_x appartiennent à toutes les variétés de la congruence.

Dans l'espace à trois dimensions, les formules (I) représentent *une congruence linéaire de cubiques gauches passant par un point fixe $(dd'd'')$ et s'appuyant huit fois sur une sextique gauche de genre trois*, $\| a_x b_x c_x d_x \|$. Pour la justification de la seconde partie de l'énoncé, voir notre étude précédente.

Dans le plan, les formules (I) représentent *une congruence linéaire (ou involution) de triangles, douée de six points singuliers.*

15. Les points singuliers d'une congruence du type (II) se trouvent au moyen des équations suivantes (ρ a été remplacé par $\rho_1 : \rho_2$),

$$(\mathrm{II}') \quad \begin{cases} (\alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x)\rho_2 + (\alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x + \alpha_3 g_x)\rho_1 = 0, \\ (\alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x)\rho_2 + (\alpha_1 d'_x + \alpha_2 f'_x + \alpha_3 g'_x)\rho_1 = 0, \\ a''_x \rho_2 + d''_x \rho_1 = 0. \end{cases}$$

1° Le rapport $\rho_1 : \rho_2$ est indéterminé si l'on a $a''_x = d''_x = 0$, relations qui donnent une variété linéaire à $d - 3$ dimensions, coupant chaque variété de la congruence suivant une variété quadratique à $d - 4$ dimensions ;

2° Si $\rho_1 : \rho_2$ est une constante inconnue, les deux premières équations (II′) sont indéterminées en α_1, α_2, α_3 quand on a

$$\left\| \begin{matrix} \rho_2 a_x + \rho_1 d'_x & \rho_2 b_x + \rho_1 f'_x & \rho_2 c_x + \rho_1 g_x \\ \rho_2 a'_x + \rho_1 d''_x & \rho_2 b'_x + \rho_1 f''_x & \rho_2 c'_x + \rho_1 g'_x \end{matrix} \right\| = 0;$$

en éliminant de ces relations et de l'égalité $a''_x \rho_2 + d''_x \rho_1 = 0$ le rapport $\rho_1 : \rho_2$, on obtient les équations

$$\Sigma \equiv \left\| \begin{matrix} (a_x d''_x - d_x a''_x) & (b_x d''_x - f_x a''_x) & (c_x d''_x - g_x a''_x) \\ (a'_x d''_x - d'_x a''_x) & (b'_x d''_x - f'_x a''_x) & (c'_x d''_x - g'_x a''_x) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Omettons la seconde ou la troisième colonne de cette matrice : nous obtenons deux hypersurfaces du quatrième ordre, admettant toutes deux, comme variété double, la variété linéaire $a''_x = d''_x = 0$. Ces hypersurfaces ont une intersection du seizième ordre, où $a''d''$ figure comme variété quadruple; du système restant qui est du douzième ordre, il faut défalquer la variété cubique annulant la première colonne de Σ sans faire évanouir a''_x et d''_x. Donc $\Sigma = 0$ représente une variété du neuvième ordre à $d - 3$ dimensions.

Dans l'espace ordinaire, *les cubiques gauches de la congruence* (II) *ont une bisécante commune* a″d″ *et s'appuient, chacune par huit points, sur une courbe gauche du neuvième ordre.*

En effet, la première colonne de Σ peut se remplacer, grâce à l'addition des colonnes, par

$$(\alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x) d''_x - (\alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x + \alpha_3 g_x) a''_x$$
$$(\alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x) d''_x - (\alpha_1 d'_x + \alpha_2 f'_x + \alpha_3 g'_x) a''_x$$

et cette colonne s'annule pour une cubique variable de la congruence plus la droite $a''d''$. Cette cubique variable coupe, en douze points, la surface quartique représentée par les deux

dernières colonnes de Σ; cette surface a pour droite double la droite $a''d''$ qui est bisécante de la cubique. Donc il reste huit points de la cubique sur la courbe de neuvième ordre.

Dans le plan, les formules (II) représentent *une congruence linéaire (ou involution) de triangles, douée de dix points singuliers*, y compris le point $a''d''$.

16. Passons au type (III); nous devons examiner les relations

$$(\text{III}') \quad \begin{cases} \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_2 b_x + \rho_1\alpha_1 d_x + \rho_1\alpha_3 g_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a'_x + \rho_1\alpha_2 b'_x + \rho_1\alpha_1 d'_x + \rho_1\alpha_3 g'_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a''_x + \rho_2\alpha_2 b''_x + \rho_1\alpha_1 d''_x + \rho_1\alpha_3 g''_x = 0. \end{cases}$$

1° Si $\rho_1 : \rho_2$ doit varier avec les α, ces trois égalités seront satisfaites pour ∞^1 systèmes de valeurs de $\rho_2\alpha_1$, $\rho_2\alpha_2$, $\rho_1\alpha_1$, $\rho_1\alpha_3$ quand on aura

$$\| a_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \| = 0,$$

ce qui représente une variété sextique à $d - 3$ dimensions;

2° Si $\rho_1 : \rho_2$ est une constante inconnue, les équations (III') sont indéterminées en α_1, α_2, α_3 quand tous les premiers mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} \rho_2 a_x + \rho_1 d_x & \rho_2 b_x & \rho_1 g_x \end{vmatrix}$$

sont nuls. Or, cela arrive pour $\rho_1 = 0$ et $\| a_x \; b_x \| = 0$, ou pour $\rho_2 = 0$ et $\| d_x \; g_x \| = 0$, relations qui représentent deux variétés cubiques à $d - 3$ dimensions.

S'il y a quatre variables homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, les formules (III) représentent *une congruence de cubiques gauches ayant pour directrices une sextique du genre trois et deux cubiques gauches; chaque courbe de la congruence rencontre huit fois la sextique et une fois chaque cubique directrice; chaque cubique directrice rencontre huit fois la sextique.*

Dans le plan, on a *une congruence linéaire de triangles douée de douze points singuliers.*

17. Les congruences du type (IV) donnent lieu aux équations

$$(\mathrm{IV}')\quad \begin{cases} \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_2 b_x + \rho_3\alpha_3 c_x + \rho_1\alpha_1 d_x + \rho_4\alpha_2 f_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a'_x + \rho_2\alpha_3 c'_x + \rho_1\alpha_1 d'_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a''_x + \rho_2\alpha_3 c''_x + \rho_1\alpha_1 d''_x = 0. \end{cases}$$

1° Considérons les deux dernières; si $\rho_1 : \rho_2$ est une constante inconnue, ces relations sont indéterminées en $\alpha_1 : \alpha_3$ quand on a

$$\rho_2 a'_x + \rho_1 d'_x = 0, \quad \rho_2 a''_x + \rho_1 d''_x = 0, \quad \rho_2 c'_x = 0, \quad \rho_2 c''_x = 0;$$

ceci arrive soit pour $\rho_2 = 0$ et $d'_x = d''_x = 0$, ce qui représente une variété linéaire à $d - 3$ dimensions, soit pour $c'_x = c''_x = (a'_x d''_x - a''_x d'_x) = 0$, ce qui représente une variété quadratique à $d - 4$ dimensions;

2° Si ces deux dernières équations (IV′) sont indéterminées en $\rho_2\alpha_1$, $\rho_2\alpha_3$, $\rho_1\alpha_1$, on a

$$\left\| \begin{matrix} a'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

variété cubique à $d - 3$ dimensions qui contient la variété quadratique trouvée immédiatement auparavant;

3° Si les deux dernières équations (IV′) donnent un seul système de valeurs de $\rho_2\alpha_1$, $\rho_2\alpha_3$, $\rho_1\alpha_1$, la première équation (IV′) peut encore être indéterminée en $\alpha_1 : \alpha_2$ si l'on a

$$\rho_2 b_x + \rho_1 f_x = 0, \quad \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_3 c_x + \rho_1\alpha_1 d_x = 0$$

et ces égalités combinées avec les deux dernières (IV′) donnent

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x & b_x \\ c_x & c'_x & c''_x & 0 \\ d_x & d'_x & d''_x & f_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

qui représente une variété sextique à $d - 3$ dimensions.

De plus, les équations (IV′) sont encore vérifiées pour $f_x = 0$ et $\rho_2 = \alpha_1 = 0$, donc ∞^1 variétés de la congruence se ramènent à une variété f_x à $d - 2$ dimensions, accompagnée d'une variété linéaire $c'_x = c''_x = 0$ à $d - 3$ dimensions.

Si $d = 4$, *la congruence du type* (IV) *est formée de cubiques gauches rencontrant quatre fois une sextique gauche de genre trois, rencontrant cinq fois une cubique gauche octosécante de la cubique directrice et rencontrant une fois une droite bisécante de la cubique directrice.* En effet, la cubique variable et la cubique directrice sont de système opposé sur la quadrique

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 c''_x \\ d'_x & d''_x \end{vmatrix} = 0,$$

donc elles se coupent en cinq points; la cubique directrice est représentée par deux colonnes de la matrice annulée par la sextique, donc ces deux courbes se coupent en huit points; la cubique variable et la cubique directrice étant sur une même quadrique, et la seconde coupant huit fois la sextique, la première la coupe quatre fois, car les trois courbes sont sur la même surface cubique,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & a'_x & a''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & d'_x & d''_x \end{vmatrix} = 0;$$

enfin la droite $d'd''$ est bisécante de la cubique directrice et unisécante de la cubique variable qu'elle rencontre au point

$$d'_x = d''_x = \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x = 0.$$

Si $d = 3$, on a *une congruence linéaire de triangles, présentant neuf points singuliers.*

18. Considérons ensuite le type (V), qui donne les équations

$$(V') \quad \begin{cases} \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_2 b_x + \rho_2\alpha_3 c_x + \rho_1\alpha_1 d_x + \rho_1\alpha_2 f_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a'_x + \rho_2\alpha_2 b'_x + \rho_1\alpha_1 d'_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a''_x + \rho_2\alpha_2 b''_x + \rho_1\alpha_1 d''_x = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières sont indéterminées en $\rho_2\alpha_1$, $\rho_2\alpha_2$, $\rho_1\alpha_1$ si l'on a

$$\begin{Vmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{Vmatrix} = 0,$$

ce qui représente une variété cubique à $d - 3$ dimensions.

Si $\rho_1 : \rho_2$ est une constante inconnue, les deux dernières équations sont encore indéterminées en $\alpha_1 : \alpha_2$ quand on a

$$b'_x = b''_x = (a'_x d''_x - a''_x d'_x) = 0,$$

ce qui représente une variété quadratique à $d - 4$ dimensions, contenue dans la variété précédente à $d - 3$ dimensions; ou bien quand on a $\rho_2 = 0$ et $d'_x = d''_x = 0$, ce qui représente une variété linéaire à $d - 3$ dimensions.

Si les deux dernières équations (V') sont déterminées en $\rho_2\alpha_1$, $\rho_2\alpha_2$, $\rho_1\alpha_1$, la première peut être indéterminée en α_3 quand on a

$$c_x = 0, \quad \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_2 b_x + \rho_1\alpha_1 d_x + \rho_1\alpha_2 f_x = 0.$$

Or les deux dernières équations (V') donnent

$$\rho_2\alpha_1 : \rho_2\alpha_2 : \rho_1\alpha_1 = (b'd'') : (d'a'') : (a'b'')$$

et la substitution fournit

$$c_x = 0, \; a_x(b'd'')(d'a'') + b_x(d'a'')^2 + d_x(b'd'')(a'b'') + f_x(a'b'')(b'd'') = 0,$$

ce qui représente une variété du cinquième ordre à $d - 3$ dimensions.

Observons en passant que, pour $f_x = 0$ et $\rho_2 = \alpha_1 = 0$, les équations (V') sont toujours satisfaites : une infinité simple de variétés de la congruence se ramènent à une variété f_x à $d - 2$ dimensions et une autre $b'_x = b''_x = 0$ à $d - 3$ dimensions.

Dans l'espace ordinaire, on a *une congruence de cubiques gauches ayant pour directrices une cubique gauche, une quintique plane et une droite.*

Dans le plan, on a *une congruence de triangles présentant neuf points singuliers, dont cinq en ligne droite.*

19. Enfin le type (VI) nous conduit aux relations

$$(\text{VI}') \quad \begin{cases} \rho_2\alpha_1 a_x + \rho_2\alpha_2 b_x + (\rho_2\alpha_3 + \rho_1\alpha_2)c_x + \rho_1\alpha_1 d_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a'_x + \rho_2\alpha_2 b'_x + (\rho_2\alpha_3 + \rho_1\alpha_2)c'_x + \rho_1\alpha_1 d'_x = 0, \\ \rho_2\alpha_1 a''_x + \rho_2\alpha_2 b''_x + (\rho_2\alpha_3 + \rho_1\alpha_2)c''_x + \rho_1\alpha_1 d''_x = 0. \end{cases}$$

Elles sont indéterminées en $\rho_1 : \rho_2$ et α_1, α_2, α_3 quand on a

$$\| a_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \| = 0,$$

ce qui représente une variété sextique à $d - 3$ dimensions.

Si $\rho_1 : \rho_2$ est une constante inconnue, les équations sont indéterminées en α_1, α_2, α_3 quand les premiers mineurs du déterminant

$$\left| \begin{matrix} \rho_2 a_x + \rho_1 d_x & \rho_2 b_x + \rho_1 c_x & \rho_2 c_x \end{matrix} \right|$$

sont tous nuls; ceci arrive pour $\rho_2 = 0$ et $\| d_x c_x \| = 0$, variété cubique à $d - 3$ dimensions; et pour $\| b_x c_x \| = 0$ avec $| a_x d_x c_x | = 0$, variété du neuvième ordre à $d - 4$ dimensions, contenue dans la variété singulière sextique.

Dans l'espace ordinaire, *la congruence du type* (VI) *est formée de cubiques gauches coupant huit fois une sextique gauche de genre trois, et une fois une cubique gauche octosécante de la sextique.* Ces directrices n'offrent que neuf conditions, au lieu des dix requises pour une double infinité de cubiques. Mais le type (VI), de même que le type (V) est un cas limite; il y a donc une condition de contact dont la détermination exigerait l'étude approfondie de la congruence. Cette théorie peut être exposée, pour les six types ci-dessus d'après le modèle que nous avons donné pour la gerbe de cubiques ayant en commun deux points et trois bisécantes (voir notre *Étude de quelques surfaces algébriques*, etc., chap. III); de tels développements menacent d'être longs et monotones; ils ne peuvent trouver place ici.

Dans le plan, *les formules* (VI) *représentent une congruence linéaire de triangles, douée de neuf points singuliers.*

Classe d'une congruence de variétés algébriques.

20. Appelons *classe* d'une congruence de variétés algébriques le nombre de fois qu'une droite arbitraire de l'espace contient deux points x d'une des variétés proposées.

Soit la congruence

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} f_{11}(\alpha, x) & f_{12}(\alpha, x) & f_{13}(\alpha, x) \\ f_{21}(\alpha, x) & f_{22}(\alpha, x) & f_{23}(\alpha, x) \end{matrix} \right\| = 0,$$

les formes f_{ik} étant du premier degré en $x_1, x_2, \dots x_d$ et du degré $p_i + q_k$ en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, et supposons $p_1 \geqslant p_2$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant q_3$.

Si le point x parcourt une droite yz, on peut poser

$$\rho x_h = y_h + t z_h, \quad (h = 1, 2, \dots d);$$

les fonctions f_{ik} deviennent $f_{ik}(\alpha, y) + t f_{ik}(\alpha, z)$. Exprimons alors que la variété

$$\| f_{ik}(\alpha, y) + t f_{ik}(\alpha, z) \| = 0$$

contient deux points de la droite yz ou que les équations

$$f_{1k}(\alpha, y) + t f_{1k}(\alpha, z) + \rho f_{2k}(\alpha, y) + \rho t f_{2k}(\alpha, z) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sont compatibles pour deux systèmes de valeurs de ρ et t :

$$\mathrm{N} \equiv \| f_{1k}(\alpha, y) \quad f_{1k}(\alpha, z) \quad f_{2k}(\alpha, y) \quad f_{2k}(\alpha, z) \| = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Considérons les y et les z comme des constantes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ comme les coordonnées d'un point d'un plan. Omettons, dans N, la seconde ou la quatrième colonne : les deux déterminants obtenus représentent deux courbes en α, de degrés respectifs $p_1 + 2p_2 + \Sigma q$ et $2p_1 + p_2 + \Sigma q$. De leurs intersections, il faut défalquer les μ points qui rendent proportionnelles les première et troisième colonnes de N; or on sait que

$$\mu = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 + \Sigma p \Sigma q + \Sigma q_1 q_2.$$

Si la congruence donnée est linéaire, $\mu - 1$ des points α sont fixes; s'ils sont simples sur les courbes C pour la matrice M, ils le sont aussi *en général* pour les courbes C de la matrice N; alors le nombre variable de points α annulant N est

$$\begin{aligned}(2p_1 + p_2 + \Sigma q)(p_1 + 2p_2 + \Sigma q) - 2\mu + 1 &\equiv 2p_1^2 + 2p_2^2 + 5p_1p_2 \\ &+ 3\Sigma p \Sigma q + (\Sigma q)^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2 - 2p_1p_2 - 2\Sigma p \Sigma q - 2\Sigma q_1 q_2 + 1 \\ &\equiv 3p_1p_2 + \Sigma p \Sigma q + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 1.\end{aligned}$$

Telle est, *en général*, la classe d'une congruence linéaire; mais elle peut s'abaisser lorsque des points fixes α sont multiples pour les courbes C de la matrice N. Quand tous les nombres q sont nuls, ainsi que p_2, la classe est toujours 1 ; nous avons vu que, dans les plus simples de ces cas, la congruence se ramène au type (I).

21. On peut donc formuler une règle pour découvrir la classe d'une congruence, quand les formes de la matrice sont linéaires en x : on double la matrice dans le sens des lignes ; on remplace, dans chaque moitié du nouveau tableau, les variables x par les coordonnées d'un point y ou d'un point z, et l'on compte le nombre de points α variables qui annulent cette nouvelle matrice. En appliquant cette règle, et en donnant une attention spéciale aux points fixes σ, on trouve sans peine les résultats suivants.

Les congruences linéaires du type (I) sont toujours de première classe ; elles constituent, dans l'espace à trois dimensions, le premier type de congruences linéo-linéaires trouvé par M. Veneroni (*).

Les congruences des types (II), (III), (IV), (V), (VI) sont respectivement de classe 3, 4, 2, 4, 6. Il serait intéressant de rechercher dans quels cas cette classe s'abaisse. Nous ne traiterons pas ici cette question. Mentionnons seulement ce cas particulier du type (II) constituant une congruence de première classe.

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & a''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_3 g'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est le second type de congruence linéo-linéaire de M. Veneroni (**), si l'on s'en tient à l'espace à trois dimensions : les cubiques gauches qui le constituent sont fournies par les intersections mutuelles des quadriques de deux faisceaux,

$$\left| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & a''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & d''_x \end{matrix} \right| = 0, \quad \left| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & a''_x \\ \alpha_1 d'_x + \alpha_3 g'_x & d''_x \end{matrix} \right| = 0,$$

ayant toutes la génératrice commune $a''d''$; ces cubiques ont pour directrices cette droite $a''d''$ qu'elles rencontrent chacune en deux points, ainsi que les deux cubiques

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & a''_x \\ d_x & f_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} a'_x & c'_x & a''_x \\ d'_x & g'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

(*) *Rendic. circ. mat.* Palermo, 1902.

(**) *Ibid.*

qu'elles rencontrent chacune en quatre points et qui ont aussi $a''d''$ comme bisécante. M. Veneroni a aussi signalé, en 1904, le cas limite où ces deux cubiques coïncident.

Cubiques gauches ayant cinq bisécantes communes.

22. Nous allons montrer que le système de cubiques gauches ayant cinq bisécantes communes se ramène à un type signalé au n° 12.

Appelons $y'z'$, $y''z''$, $y'''z'''$, $y^{\text{IV}}z^{\text{IV}}$, $y^{\text{V}}z^{\text{V}}$ cinq droites données définies chacune par deux points. Prenons, sur la première, deux autres points H et L, ayant pour coordonnées

$$y'_i + hz'_i, \quad y'_i + lz'_i.$$

Les six plans menés par chacun de ces deux points et par les trois droites $y''z''$, $y'''z'''$, $y^{\text{IV}}z^{\text{IV}}$ ont pour équations

$$\begin{aligned}
a_x &\equiv (xy'y''z'') + h(xz'y''z'') \equiv \text{A} + h\text{A}' = 0,\\
a'_x &\equiv (xy'y'''z''') + h(xz'y'''z''') \equiv \text{B} + h\text{B}' = 0,\\
a''_x &\equiv (xy'y^{\text{IV}}z^{\text{IV}}) + h(xz'y^{\text{IV}}z^{\text{IV}}) \equiv \text{C} + h\text{C}' = 0,\\
b_x &\equiv \text{A} + l\text{A}' = 0,\\
b'_x &\equiv \text{B} + l\text{B}' = 0,\\
b''_x &\equiv \text{C} + l\text{C}' = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons montré (*) que la congruence de cubiques gauches passant par H et L et admettant pour bisécantes $y''z''$, $y'''z'''$, $y^{\text{IV}}z^{\text{IV}}$ a pour équations

$$\text{G} \equiv \begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{Vmatrix} = 0.$$

Cherchons celle de ces cubiques qui a pour bisécante $y^{\text{V}}z^{\text{V}}$: une bisécante d'une courbe variable de la congruence G a pour équations

$$\begin{aligned}
\lambda\alpha_1 a_x + \mu\alpha_2 a'_x + \nu\alpha_3 a''_x &= 0,\\
\lambda b_x + \mu b'_x + \nu b''_x &= 0.
\end{aligned}$$

(*) *Étude de quelques surfaces algébriques, etc.* Chap. III.

Exprimons que cette bisécante passe par les points y^{ν} et z^{ν}; des quatre relations ainsi obtenues nous tirons

$$\lambda : \mu : \nu = | b'_{y^{\nu}} b''_{z^{\nu}} | : | b''_{y^{\nu}} b_{z^{\nu}} | : | b_{y^{\nu}} b'_{z^{\nu}} |,$$
$$\lambda\alpha_1 : \mu\alpha_2 : \nu\alpha_3 = | a'_{y^{\nu}} a''_{z^{\nu}} | : | a''_{y^{\nu}} a_{z^{\nu}} | : | a_{y^{\nu}} a'_{z^{\nu}} |;$$

par division, nous obtenons les valeurs proportionnelles à α_1, α_2, α_3; en les portant dans la matrice G, nous aurons la représentation suivante de la courbe cherchée :

$$\left\| \begin{matrix} a_x \mid a'_{y^{\nu}} a''_{z^{\nu}} \mid & a'_x \mid a''_{y^{\nu}} a_{z^{\nu}} \mid & a''_x \mid a_{y^{\nu}} a'_{z^{\nu}} \mid \\ b_x \mid b'_{y^{\nu}} b''_{z^{\nu}} \mid & b'_x \mid b''_{y^{\nu}} b_{z^{\nu}} \mid & b''_x \mid b_{y^{\nu}} b'_{z^{\nu}} \mid \end{matrix} \right\| = 0.$$

En nous reportant aux expressions données plus haut pour les formes a, b, nous voyons que les éléments de cette matrice contiennent les x au premier degré; que les éléments de la première ligne sont cubiques en h et ceux de la seconde cubiques en l; que les deux lignes ne diffèrent que par la substitution de l à h. Or, si l et h varient, on a ∞^2 cubiques gauches ayant pour bisécantes les cinq droites données; on peut évidemment rendre les paramètres homogènes.

La congruence de cubiques gauches ayant cinq bisécantes communes est représentée par une matrice de six formes linéaires quaternaires contenant les paramètres variables au troisième degré; un paramètre manque dans chaque ligne et les deux lignes ne diffèrent que par le nom des paramètres.

Or, au n° 12, nous avons vu qu'une congruence de ce type est linéaire, parce que son évanouissement donne le point double d'une cubique plane rationnelle.

Ainsi apparaît une relation inattendue entre les deux faits géométriques suivants, fort éloignés en apparence et traduits par les mêmes formules analytiques :

Une cubique plane rationnelle possède un point double et un seul.	*Un point et cinq bisécantes définissent une cubique gauche et une seule.*

III

La théorie des matrices dans l'espace réglé.

Aussitôt que le nombre des variables homogènes des formes considérées dépasse quatre, il se présente des possibilités algébriques nouvelles; notamment les conditions de l'évanouissement d'une matrice à l lignes et $l+3$ colonnes deviennent compatibles en général; il en est de même des conditions nécessaires pour que les premiers mineurs d'un déterminant soient tous nuls.

Pour nous, ces questions d'algèbre n'ont d'intérêt que par leur application à la géométrie, et plus spécialement à la géométrie à trois dimensions. Aussi après avoir montré brièvement ce qui se passe dans le cas de cinq ou de n variables, nous passerons à l'hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions; cette théorie, on le sait, est celle de l'espace ordinaire réglé.

Nous avons déjà dit, dans notre première étude, et nous répétons ici, que tous les résultats d'algèbre sont contenus dans une formule unique de M. Giambelli. Pourtant nous démontrons les théorèmes dont nous avons besoin, parce qu'il est bon d'avoir des procédés pour résoudre chaque problème particulier (*).

Matrices à l lignes et $l+3$ colonnes.

1. S'il y a cinq variables homogènes, une matrice $M \equiv \| a_{ik} \|$ à l lignes et $l+3$ colonnes s'annule en général pour un nombre fini de points dans l'espace à quatre dimensions. Indiquons la

(*) [Nous avons reçu, peu de jours après l'envoi de notre manuscrit, deux nouvelles notes de M. Giambelli, intitulées : *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme*, etc. (Rendic. R. Accad. dei Lincei, série 5, t. XIV, séances du 3 et du 17 décembre 1905).]

marche à suivre pour trouver ces points quand l'élément a_{ik} est de degré $n_i + q_k$ en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Les l premières colonnes forment un déterminant qui s'annule pour une hypersurface d'ordre

$$\mu = \Sigma n + \Sigma q - (n_{l+1} + n_{l+2} + n_{l+3}).$$

Les $l + 2$ dernières colonnes représentent une courbe dont l'ordre ν est (voir notre Etude I) une fonction connue des nombres n et q figurant dans ces colonnes. Des $\mu\nu$ intersections, il faut défalquer les points annulant la matrice N des $l + 2$ dernières colonnes de M en même temps que la matrice P des $l - 1$ premières colonnes de N.

Mais la recherche de ces derniers points se ramène au problème initial. En effet, les points annulant la matrice des $l - 1$ premières colonnes de N forment une variété à deux dimensions, et les points annulant la matrice des $l + 1$ dernières colonnes de N en forment une autre Q également à deux dimensions; elles ont en commun des points isolés en nombre facile à caluler. Il faut en déduire les points annulant la matrice des $l - 2$ premières colonnes de Q ainsi que le déterminant des l dernières et ceci se ramène facilement au premier problème proposé avec une diminution du nombre d'éléments.

Il n'y a pas de difficulté essentielle à chercher les formules générales des problèmes esquissés ci-dessus; mais l'intérêt de ces formules est mince. Nous allons restreindre la généralité pour avoir des résultats plus maniables.

Constatons en passant que, si une matrice de formes quinaires s'annule pour λ points, la même matrice de formes à d variables s'annule pour une variété d'ordre λ, à $d - 3$ dimensions, dans l'espace à $d - 1$ dimensions.

2. Soit une matrice à l lignes et $l + 3$ colonnes de formes quinaires, tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne étant d'ordre q_i. Les l premières colonnes forment un déterminant qui s'annule pour une hypersurface d'ordre $\Sigma_1^l q_i$.

Les $l + 2$ dernières colonnes forment une matrice s'annulant pour une courbe d'ordre (voir notre Étude I)

$$\Sigma_2^{l+3} q_i q_j q_k \qquad (i \gtrless j \gtrless k).$$

La formule donnant les points communs contient le terme en q_1

$$q_1 \Sigma_2^{l+3} q_i q_j q_k.$$

Pour les points à défalquer, la lettre q_1 n'entre plus en ligne de compte. Or le nombre des points annulant la matrice donnée est évidemment une fonction symétrique des lettres q; donc cette fonction est

$$\Sigma q_i q_j q_k q_h \qquad (i \gtrless j \gtrless k \gtrless h).$$

3. Soit une matrice P à l lignes et $l - 1$ colonnes de formes quinaires d'ordre q_i par colonne; faisons-la suivre de trois colonnes de constantes, ce qui donne une matrice N à l lignes et $l + 2$ colonnes; cherchons le nombre de points communs aux deux variétés annulant P et N. La première est d'ordre

$$\Sigma q^2 + \Sigma q_1 q_2.$$

La matrice des $l + 1$ dernières colonnes de N s'annule pour une variété d'ordre

$$\Sigma_2^{l-1} q_i q_j.$$

Dans la formule donnant les points communs, les termes en q_1 sont

$$q_1^2 \Sigma_2^{l-1} q_i q_j + q_1 \Sigma_2^{l-1} q_i^2 q_j + q_1 \Sigma_2^{l-1} q_i q_j q_k.$$

La lettre q_1 n'intervient pas dans la formule des termes à défalquer; donc, à cause de la symétrie évidente, le résultat est

$$\Sigma q_i^2 q_j q_k + \Sigma q_i q_j q_k q_h.$$

4. Soit une matrice N à $l + 2$ colonnes et l lignes de formes quinaires, les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne étant tous de degré m_i. Cherchons les points communs à cette matrice N et à la variété

annulant la matrice P des $l - 1$ premières colonnes de N; d'après notre Étude I, la variété P est d'ordre

$$\Sigma m_1 m_2$$

et la variété Q annulant la matrice des $l + 1$ dernières colonnes de N est d'ordre

$$\Sigma m^2 + \Sigma m_1 m_2.$$

Des points communs, il faut défalquer ceux qui annulent la matrice des $l - 2$ premières colonnes de Q ($\Sigma m_1 m_2 m_3$), en même temps que le déterminant des l dernières colonnes (Σm), sans toutefois annuler la matrice des $l - 3$ premières colonnes de ce déterminant. Comme d'après le n° 2, ces derniers points sont en nombre $\Sigma m_1 m_2 m_3 m_4$, le résultat final est

$$\Sigma m^2 \Sigma m_1 m_2 + (\Sigma m_1 m_2)^2 - \Sigma m \Sigma m_1 m_2 m_3 + \Sigma m_1 m_2 m_3 m_4,$$

ou encore

$$\Sigma m_1^2 m_2 + (\Sigma m_1 m_2)^2.$$

5. Soit enfin une matrice M de $l + 3$ colonnes et de l lignes de formes quinaires d'ordre m_i par ligne; cherchons le nombre des points annulant M. Les l premières colonnes représentent une hypersurface d'ordre Σm et les $l + 2$ dernières colonnes une courbe d'ordre

$$\Sigma m \Sigma m^2 + \Sigma m_1 m_2 m_3.$$

Des points communs, il faut défalquer ceux qui annulent la matrice N des $l + 2$ dernières colonnes de M et la matrice P des $l - 1$ premières de N, résultat que l'on vient de trouver. La formule finale est donc

$$(\Sigma m)^2 \Sigma m^2 + \Sigma m \Sigma m_1 m_2 m_3 - \Sigma m_1^2 m_2 - (\Sigma m_1 m_2)^2$$

et on peut évidemment lui donner diverses autres formes.

Congruences de droites annulant des matrices.

6. Considérons une matrice $\| a_{ik} \|$ à l lignes et $l + 1$ colonnes de formes homogènes en p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{42}, p_{34} et, pour

restreindre un peu la généralité, supposons que les éléments de chaque ligne soient de même ordre m_i.

Si l'on admet la relation identique

$$\Pi \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

les quantités p_{ik} sont les coordonnées plückériennes d'une droite dans l'espace à trois dimensions. Chaque élément a_{ik}, égalé à zéro, représente un complexe d'ordre m_i. L'évanouissement de la matrice $\| a_{ik} \|$ représente donc une congruence Γ de droites dont l'ordre (et la classe) est

$$\Sigma m^2 + \Sigma m_1 m_2.$$

7. En faisant précéder la matrice $\| a_{ik} \|$ d'une ligne de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l+1}$, on a un complexe C d'ordre Σm contenant la congruence Γ.

Deux complexes C, caractérisés respectivement par les constantes α et β, non proportionnelles, ont en commun, d'abord la congruence Γ, ensuite une congruence Δ annulant la matrice obtenue en faisant précéder $\| a_{ik} \|$ des deux lignes de constantes α et β. On peut remplacer les α ou les β par des quantités $\alpha + k\beta$, de sorte que les congruences Γ et Δ servent de base à un faisceau de complexes C; si les α et les β sont des coordonnées de points dans un espace à l dimensions ($l \geqslant 2$), on peut dire que chaque congruence Δ est associée à une droite de cet espace.

La congruence Δ est d'ordre $\Sigma m_1 m_2$; elle a en commun avec la congruence Γ une surface réglée R dont l'ordre se trouve d'après notre Étude I; seulement, il faut introduire le facteur 2, à cause de l'hyperquadrique $\Pi = 0$. Voici le degré de R :

$$r = 2(\Sigma m_1^2 m_2 + 2\Sigma m_1 m_2 m_3).$$

Ceci suppose que l vaut au moins 3. Ainsi, *deux complexes* C *circonscrits à la congruence* Γ *ont encore en commun une congruence* Δ *d'ordre* $\Sigma m_1 m_2$ *qui coupe* Γ *suivant une surface réglée d'ordre* r.

8. Chaque surface réglée R est déterminée par un nombre fini de ses rayons. En effet, donner un rayon de Γ c'est donner un faisceau de relations linéaires entre les éléments de chaque ligne de $\| a_{ik} \|$. Les coefficients d'une de ces relations peuvent être considérés comme des coordonnées homogènes d'un hyperplan dans un espace à l dimensions. Comme les α et les β doivent vérifier une de ces relations, les points α et β (de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l+1}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{l+1}$) doivent être dans un des hyperplans de ce faisceau; la droite $\alpha\beta$ doit donc s'appuyer sur le biplan, base de ce faisceau.

Or, on démontre assez facilement, et le fait doit être connu, qu'il existe un nombre fini μ de droites s'appuyant sur $2l - 2$ biplans, et ce nombre μ est égal à $1.2.3\ldots(l-1)$.

Par suite, *toute surface* R *est déterminée par* $2l - 2$ *de ses rayons, mais non d'une façon univoque, car un groupe de* $2l - 2$ *rayons appartient à* μ *surfaces* R.

9. Trois complexes C, caractérisés par les lignes de constantes α, β, γ qui, par hypothèse, n'appartiennent pas à un même faisceau, ont en commun, outre la congruence Γ, une surface réglée S obtenue en faisant précéder la matrice $\| a_{ik} \|$ de trois lignes de constantes α, β, γ. Si l est au moins 3, l'ordre de cette surface réglée est

$$2\Sigma m_1 m_2 m_3.$$

La surface S a en commun avec Γ un nombre fini de rayons. Ce nombre est, d'après le n° 3,

$$2(\Sigma m_1^2 m_2 m_3 + \Sigma m_1 m_2 m_3 m_4),$$

en supposant l au moins égal à 4.

Quatre complexes C ont en général (si l est au moins 4) un nombre fini de rayons communs hors de Γ. Pour les obtenir, il suffit de faire précéder la matrice $\| a_{ik} \|$ de quatre lignes de constantes; la nouvelle matrice s'annule pour un nombre de droites égal à

$$2\Sigma m_1 m_2 m_3 m_4.$$

10. Considérons à présent une matrice à l lignes et $l+1$ colonnes de formes a_{ik}, les formes d'une même colonne étant du même degré n_k en p_{12}, p_{13}, ... Cette matrice s'annule pour les rayons d'une congruence Γ de droites, congruence d'ordre et de classe $\Sigma n_1 n_2$.

En faisant suivre la matrice d'une colonne de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, on a la représentation d'une surface réglée **T** d'ordre $2\Sigma n_1 n_2 n_3$, dont tous les rayons appartiennent à Γ (en supposant le nombre $l+1$ de colonnes au moins égal à 3).

Une telle surface **T** est en général déterminée sans ambiguité par $l-1$ rayons de Γ. Car, donner un rayon de Γ, c'est donner *une* relation linéaire entre les éléments de chaque colonne de la matrice $\| a_{ik} \|$. Les coefficients de cette relation peuvent être regardés comme les coordonnées d'un hyperplan dans l'espace à $l-1$ dimensions. Les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, devant vérifier cette relation, peuvent être regardées comme les coordonnées d'un point qui doit être sur l'hyperplan en question. Or, en général, $l-1$ hyperplans de l'espace à $l-1$ dimensions déterminent un point, et un seul. Donc $l-1$ *rayons de* Γ *déterminent une surface réglée* **T**, *et une seule.*

Deux surfaces réglées **T**, définies par des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$, non proportionnelles, ont en commun un nombre fini de rayons. Ceux-ci sont représentés par l'évanouissement de la matrice $\| a_{ik} \|$ suivie de deux colonnes de constantes. Leur nombre est en général

$$2\Sigma n_1 n_2 n_3.$$

Un de ces groupes est déterminé par $l-2$ rayons de Γ. Car, donner un rayon de Γ c'est donner un hyperplan de l'espace à $l-1$ dimensions et cet hyperplan doit passer par les points α et β, donc par la droite $\alpha\beta$. Or $l-2$ hyperplans définissent une droite.

11. Dans le cas où les éléments de la matrice ne sont pas de même ordre en $p_{12}, p_{13}, \ldots$ ni par ligne ni par colonne, on peut encore (voir Étude II) déterminer les complexes d'ordre le moins

élevé circonscrits à la congruence, ainsi que des surfaces réglées formées de rayons de la congruence. Mais l'énoncé des résultats est pénible, et cette recherche ne fait pas intervenir d'idée nouvelle. Nous y renonçons donc et plaçons seulement ici une remarque sur les matrices à l lignes et $l+1$ colonnes de formes toutes du même ordre n en $p_{12}, p_{13}, \ldots$

La congruence Γ est alors d'ordre et de classe $\frac{1}{2}n^2l(l+1)$.

Les complexes C du n° 7 sont d'ordre nl; les congruences Δ sont d'ordre et de classe $\frac{1}{2}n^2l(l-1)$. Les surfaces réglées R sont d'ordre

$$2n^3\left[l(l-1)+\frac{1}{6}l(l-1)(l-2)\right]=\frac{1}{3}n^3l(l-1)(6+l-2)$$

$$=\frac{1}{3}n^3l(l-1)(l+4).$$

Les surfaces réglées T du n° 10 sont d'ordre $\frac{1}{3}n^3(l+1)\,l\,(l-1)$.

Comme fait nouveau, nous enregistrons ceci : une congruence Δ et une surface T quelconques appartiennent toujours à un même complexe d'ordre $n(l-1)$, dont l'équation est l'évanouissement d'un déterminant obtenu comme suit : on fait précéder la matrice $\|\,a_{ik}\,\|$ de deux lignes de constantes, on la fait suivre d'une colonne de constantes et l'on complète par deux éléments nuls.

Nous espérons, dans un travail ultérieur, pouvoir préciser et compléter tous ces résultats pour des congruences spéciales du type Γ.

Évanouissement des premiers mineurs d'un déterminant.

12. Considérons, pour fixer les idées, un déterminant à trois lignes $|\,a_{ik}\,|$ $(i, k=1,2,3)$, dont chaque élément a_{ik} est une forme d'ordre n_i+p_k à cinq variables homogènes, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Il y a, en général, un nombre fini de points x annulant tous les premiers mineurs de ce déterminant. Ces points satisfont à quatre conditions; ils annulent notamment les deux matrices

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\right\|,\qquad \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\|.$$

Ces deux matrices représentent, dans l'espace à quatre dimensions, deux surfaces ayant en commun la courbe $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, mais les points de cette courbe sont hors de cause, car généralement aucun d'eux n'annule la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|.$$

Ainsi le problème est ramené à chercher les points communs aux deux surfaces, qui n'appartiennent pas à la courbe commune signalée. Or la surface

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\| = 0,$$

d'ordre $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 + (n_1 + n_2)\Sigma p + \Sigma p_1 p_2$, coupe l'hypersurface $a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} = 0$, d'ordre $n_1 + n_3 + p_1 + p_2$, suivant une courbe d'ordre

$$[n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 + (n_1 + n_2)\Sigma p + \Sigma p_1 p_2](n_1 + n_3 + p_1 + p_2).$$

Il faut en défalquer la courbe de degré $(n_1 + p_1)(n_1 + p_2)(n_1 + p_3)$ annulant $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$; reste donc une courbe γ de de degré

$$\begin{aligned}\gamma \equiv\ & [n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 + (n_1 + n_2)\Sigma p + \Sigma p_1 p_2](n_1 + n_3 + p_1 + p_2) \\ & - (n_1 + p_1)(n_1 + p_2)(n_1 + p_3) \equiv n_1^2(n_2 + n_3) + n_2^2(n_1 + n_3) \\ & + n_1 n_2 n_3 + \Sigma n_1 n_2 \Sigma p + (n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2)(p_1 + p_2) \\ & + (n_1 + n_2)(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + \Sigma n \Sigma p_1 p_2 + p_2^2(p_1 + p_3) + p_1 p_2 p_3.\end{aligned}$$

Cette courbe γ annule tous les déterminants à quatre éléments extraits du tableau suivant :

$$(T) \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}. \end{matrix}$$

Bien que la courbe $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$ ne soit pas partie intégrante de la courbe γ, elles ont des points communs isolés, savoir ceux qui annulent à la fois a_{11}, a_{12}, a_{13} et $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$; le nombre de ces points est

$$\mu \equiv (n_1 + p_1)(n_1 + p_2)(n_1 + p_3)(n_2 + n_3 + p_1 + p_2).$$

Pareillement, par raison de symétrie, la courbe γ coupe la courbe $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$ en des points dont le nombre est

$$\nu \equiv (n_1 + p_1)(n_2 + p_1)(n_3 + p_1)(n_1 + n_2 + p_2 + p_3).$$

La courbe γ coupe l'hypersurface $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = 0$ en $\gamma(n_1 + n_3 + p_1 + p_3)$ points. Mais il faut écarter ceux qui annuleraient a_{11} et a_{13}, ou bien a_{11} et a_{31}, sans annuler tous les premiers mineurs de $|\, a_{ik}\,|$. Or, si l'on a $a_{11} = a_{13} = 0$, voici à quoi se réduisent les déterminants extraits du tableau (T) :

$$a_{21}a_{12}, \quad 0, \quad a_{12}a_{23}, \quad a_{12}a_{31}, \quad a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

On voit sans peine qu'ils s'annulent simultanément quand on a $a_{12} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = 0$, et ces conditions, avec les hypothèses $a_{11} = a_{13} = 0$, représentent les μ points signalés plus haut. Par raison de symétrie, on doit aussi défalquer les ν points analogues.

Finalement, le nombre de points annulant les premiers mineurs de $|\, a_{ik}\,|$ est donné par la formule

$$\mathrm{N} \equiv \gamma(n_1 + n_3 + p_1 + p_3) - \mu - \nu.$$

Un calcul facile transforme cette expression en

$$\begin{aligned}\mathrm{N} \equiv{}& \Sigma n_1^2 n_2^2 + \Sigma n_1^2 n_2 n_3 + (\Sigma n_1^2 n_2 + 2n_1 n_2 n_3)\Sigma p + \Sigma n_1 n_2 \Sigma p^2 \\ &+ 3\Sigma n_1 n_3 p_1 p_3 + 2\Sigma n_1 n_3 p_1 p_2 + \Sigma n^2 \Sigma p_1 p_2 + \Sigma n(\Sigma p_1^2 p_2 + 2p_1 p_2 p_3) \\ &+ \Sigma p_1^2 p_2 p_3 + \Sigma p_1^2 p_2^2.\end{aligned}$$

Dans les cas où tous les éléments du déterminant donné sont du même degré n, les points annulant tous les premiers mineurs sont en nombre $6n^4$.

Lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots$ sont en nombre l, l'évanouissement de tous les premiers mineurs d'un déterminant à neuf éléments représente, dans l'espace à $l - 1$ dimensions, une variété algébrique à $l - 5$ dimensions et d'ordre N.

Complexes annulant des déterminants.

13. Considérons encore, pour fixer les idées, un déterminant à neuf éléments a_{ik}, mais supposons que ceux-ci soient d'ordre $n_i + p_k$ par rapport aux coordonnées homogènes d'une droite. L'évanouissement de ce déterminant représente un complexe C d'ordre $\Sigma n + \Sigma p$.

Ce complexe a des rayons doubles, savoir ceux qui annulent tous les premiers mineurs du déterminant $|\, a_{ik} \,|$.

Pour avoir le nombre de ces rayons, il faut refaire les raisonnements du paragraphe précédent, mais tenir compte en outre de l'identité quadratique entre coordonnées d'une droite. Donc, si N a la même signification qu'au n° 12, *le complexe* C *a* 2N *rayons doubles.*

Quand les éléments de chaque ligne du déterminant $|\, a_{ik} \,|$ sont du même ordre, respectivement n_1, n_2, n_3, on a

$$2N = 2\Sigma n_1^2 n_2^2 + 2\Sigma n_1^2 n_2 n_3.$$

Si tous les éléments sont du même ordre n, on a

$$2N = 12n^4.$$

14. En se limitant au cas où les éléments de chaque ligne de $|\, a_{ik} \,|$ sont d'un même degré, n_1, n_2 ou n_3, on voit qu'un rayon double δ rend les éléments des trois lignes proportionnels à trois mêmes constantes δ_1, δ_2, δ_3.

Faisons précéder le déterminant $|\, a_{ik} \,|$ d'une ligne de constantes α_1, α_2, α_3; nous obtenons une matrice qui s'évanouit pour une congruence d'ordre $\Sigma n_1 n_2$; cette congruence Γ est formée de rayons du complexe C. Si les α sont proportionnels aux δ, le rayon δ est double pour la congruence Γ; sinon, il est simple pour cette congruence.

Deux congruences Γ, caractérisées par les constantes α_1, α_2, α_3 et β_1, β_2, β_3, non proportionnelles, ont en commun les 2N rayons doubles du complexe, plus une surface réglée R d'ordre $2n_1 n_2 n_3$ dont les équations s'obtiennent en faisant précéder le déterminant $|\, a_{ik} \,|$ de deux lignes de constantes α et β.

Un groupe de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peut être considéré comme formé par les coordonnées homogènes d'un point dans un plan; si alors u_1, u_2, u_3 sont, dans ce plan, les coordonnées homogènes de la droite $\alpha\beta$, les équations de la surface réglée R peuvent s'écrire

$$E_i \equiv u_1 a_{i1} + u_2 a_{i2} + u_3 a_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si la droite u passe par le point $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, le rayon double δ correspondant appartient à la surface réglée R. Or, par un point d'un plan passent ∞^1 droites. Donc, *chaque rayon double du complexe* C *appartient à* ∞^1 *surfaces réglées* R.

Soient u et v deux de ces droites passant par le même point $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, et posons

$$F_i \equiv v_1 a_{i1} + v_2 a_{i2} + v_3 a_{i3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les équations d'une quelconque des ∞^1 surfaces R passant par le rayon double δ peuvent s'écrire

$$E_i + \lambda F_i = 0;$$

l'élimination de λ donne

$$\| E_i \quad F_i \| = 0.$$

Cette matrice représente une congruence d'ordre $\Sigma n_1 n_2$. Donc, *les génératrices des* ∞^1 *surfaces réglées* R *qui passent par un même rayon double* δ *engendrent une congruence d'ordre* $\Sigma n_1 n_2$.

Évidemment deux rayons doubles δ appartiennent à une même surface réglée R; et il existe $N(2N - 1)$ surfaces réglées R contenant chacune deux rayons doubles du complexe.

15. Lorsque tous les éléments du déterminant $| a_{ik} |$ sont du même ordre n, il y a un second système de congruences Γ obtenus en faisant suivre le déterminant d'une colonne de constantes, et un second système de surfaces réglées R, obtenues par l'adjonction de deux colonnes pareilles. Ces nouvelles congruences et surfaces se comportent, vis-à-vis des rayons doubles de C, absolument comme les premières.

On démontre, comme dans le paragraphe précédent, que deux congruences de système opposé ont en commun une surface réglée d'ordre $10n^3$ annulant tous les déterminants à neuf éléments extraits du tableau que voici

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \beta_3 \end{array}$$

Tous les rayons doubles du complexe appartiennent à chacune de ces surfaces.

Enfin deux congruences de système opposé appartiennent à un même complexe d'ordre $2n$ représenté par

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Chaque rayon double du complexe C est un rayon simple pour chacun de ces complexes d'ordre $2n$.

IV

Sur une forme doublement quadratique binaire et symétrique.

Dans les pages qui suivent, nous étudions sommairement une forme φ à deux séries de deux variables homogènes; cette forme est quadratique et symétrique par rapport aux deux séries de variables. Elle n'est probablement pas représentable par la notation symbolique de Clebsch, mais nous montrerons quelle place elle occupe dans une classification de formes symboliques, dont le degré de généralité se restreint de plus en plus. Nous faisons ensuite l'application de cette étude aux coniques et aux surfaces du quatrième ordre douées d'une cubique double

Forme φ.

1. Soient a_x^3, b_x^3 des formes cubiques binaires; on sait que l'équation

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0$$

représente une involution du troisième ordre et du premier rang.

Si deux points x et y appartiennent à un même terne de l'involution, on a

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0, \quad a_y^3 + \lambda b_y^3 = 0;$$

en éliminant λ et en divisant par $x_1y_2 - x_2y_1$, on a une équation doublement quadratique binaire représentant aussi l'involution; cette équation est symétrique en x et y.

A un point x répondent deux points y' et y''; réciproquement, au point y' répondent deux points, savoir x à cause de la symétrie et y'' parce que l'équation représente une involution.

Cette relation possède donc d'*autres* caractères que la symétrie. Il convient d'étudier la forme analogue ayant pour *seul* caractère la symétrie.

2. Puisque nous ne ferons pas usage de notations symboliques, il est superflu de conserver les variables homogènes : la forme φ doublement quadratique binaire et symétrique peut s'écrire en général

$$\varphi \equiv ax^2y^2 + bxy + c + hxy(x + y) + g(x^2 + y^2) + f(x + y).$$

Dans le courant de cette étude, nous l'appellerons la forme φ. Il est sous-entendu que x et y ne sont pas des coordonnées cartésiennes dans le plan, mais des abscisses de deux ponctuelles, sur un même support par exemple.

L'équation $\varphi = 0$ fait correspondre, à tout point x, deux points y. Lorsque ces deux points y coïncident, le point x est un *point de ramification* de la première ponctuelle. L'équation de ces points de ramification est évidemment

$$R_x^4 \equiv 4(ax^2 + hx + g)(gx^2 + fx + c) - (hx^2 + bx + f)^2 = 0.$$

A cause de la symétrie, les points de ramification de la seconde ponctuelle sont

$$R_y^4 = 0.$$

Si, comme nous l'avons supposé, les ponctuelles sont superposées; si, en outre, les abscisses x et y sont comptées à la même échelle, depuis la même origine, les deux groupes de points de ramification coïncident.

A un point de ramification x répond un point double y ; nous déterminerons plus tard ces points doubles D_x^4 et D_y^4.

On trouve les points correspondants communs aux deux ponctuelles en faisant $x = y$ dans l'équation $\varphi = 0$, ce qui donne

$$C_x^4 \equiv ax^4 + 2hx^3 + (b + 2g)x^2 + 2fx + c = 0.$$

Ce sont aussi en quelque sorte des points doubles de la forme φ; il leur répond des points Q_x^4 ou Q_y^4 définis par la propriété sui-

vante : chacun des points C_x^t répond à un point y coïncidant avec le point x considéré et à un autre point y appartenant au groupe Q; nous chercherons bientôt l'équation de ces groupes Q_x^t, Q_y^t.

3. Cherchons les relations qui lient un point quelconque x de la première ponctuelle aux deux points y' et y'' qui lui correspondent dans la seconde. On a évidemment, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\rho(ax^2 + hx + g) = 1$$
$$\rho(hx^2 + bx + f) = -(y' + y'')$$
$$\rho(gx^2 + fx + c) = y'y''.$$

Appelons Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

et A, B, ..., ses mineurs; les trois dernières relations donnent

$$\rho\Delta x^2 = A - H(y' + y'') + Gy'y''$$
$$\rho\Delta x = H - B(y' + y'') + Fy'y''$$
$$\rho\Delta = G - F(y' + y'') + Cy'y''.$$

En divisant la seconde par la troisième et la première par la seconde, on obtient

$$(H_1^3)\begin{cases} x[H - B(y' + y'') + Fy'y''] = A - H(y' + y'') + Gy'y'', \\ x[G - F(y' + y'') + Cy'y''] = H - B(y' + y'') + Fy'y''. \end{cases}$$

Les équations (H_1^3) représentent une homographie du troisième ordre et du premier rang, symétrique par rapport à deux séries de variables y' et y''. Mais, d'une part, il existe des dépendances entre les coefficients des deux équations et, d'autre part, dans chaque égalité le terme en x a le même coefficient que le terme en $(y' + y'')$; d'où il résulte que nous n'avons pas ici l'homo-

graphie la plus générale symétrique par rapport à deux séries de variables.

Pour que les équations (H_1^3) représentent une involution du troisième ordre et du premier rang, il faut qu'elles soient aussi symétriques par rapport à x et y', ce qui exige simplement que l'on ait $G = B$, ou

$$hf - bg = ac - g^2.$$

Si dans les équations (H_1^3) on fait $y' = x$, le point x devient un des points C_x^4 de la forme φ et le point y'' un des points Q_y^4. Faisons cette substitution et écrivons, pour simplifier, y au lieu de y''; nous aurons

$$x^2(Fy - B) - x(By + Gy - 2H) + Hy - A = 0,$$
$$x^2(Cy - F) - x(2Fy - B - G) + By - H = 0.$$

L'équation Q_y^4 s'obtient par élimination de x :

$$Q_y^4 \equiv [(Fy - B)(By - H) - (Gy - F)(Hy - A)]^2$$
$$- [(Fy - B)(2Fy - B - G) - (Gy - F)(By + Gy - 2H)]$$
$$[(By + Gy - 2H)(By - H) - (2Fy - B - G)(Hy - A)] = 0.$$

A cause de la symétrie, l'équation $Q_x^4 = 0$ ne diffère de la précédente que par le nom de la variable.

4. Si, entre les équations (H_1^3), on élimine x, on obtient la relation entre deux points y' et y'' de l'une des ponctuelles qui correspondent, par l'intermédiaire de la forme φ, à un même point x de l'autre ponctuelle. Voici cette relation :

$$[H - B(y' + y'') + Fy'y'']^2$$
$$= [A - H(y' + y'') + Gy'y'']\,[G - F(y' + y'') + Cy'y''].$$

Elle est doublement quadratique et symétrique par rapport aux variables y' et y'', donc analogue à la relation $\varphi = 0$.

Les couples de points y' *et* y'' *qui correspondent à un même point* x *dans la forme* φ *se correspondent l'un à l'autre dans une forme analogue à* φ.

Faisons dans la dernière équation $y' = y''$; nous aurons les points doubles D_y^4 de la forme φ :

$$D_y^4 \equiv (H - 2By + Fy^2)^2 - (A - 2Hy + Gy^2)(G - 2Fy + Cy^2) = 0.$$

L'équation $D_x^4 = 0$ ne diffère de $D_y^4 = 0$ que par le nom de la variable.

5. Nous avons déjà rencontré l'invariant de la forme φ,

$$g^2 + hf - bg - ac,$$

qui s'annule quand la forme représente une involution du troisième ordre. On devine que l'évanouissement du déterminant Δ doit aussi correspondre à un cas particulier intéressant de la correspondance étudiée. Un lemme préliminaire nous donnera l'interprétation géométrique du cas où $\Delta = 0$.

On sait que les relations paramétriques

$$\rho x_i = a_i t^2 + 2b_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

définissent une conique dans le plan des x_1, x_2, x_3. Elles donnent, en employant une notation qui s'explique d'elle-même,

$$t^2 : 2t : 1 = (xbc) : (axc) : (abx).$$

Les points d'intersection de la conique avec la droite $u_x = 0$ sont déterminés par l'équation

$$t^2 u_a + 2t u_b + u_c = 0.$$

Pour que la courbe dégénère, il faut qu'une certaine droite u la rencontre en une infinité de points; alors l'équation précédente est indéterminée, tous ses coefficients sont nuls, donc les relations en u_i,

$$u_a = 0, \quad u_b = 0, \quad u_c = 0,$$

sont compatibles et l'on a

$$(abc) = 0.$$

Or, lorsque ce déterminant est nul, sans que tous ses premiers mineurs s'évanouissent, il existe *une seule* relation linéaire entre

les éléments de ses lignes, donc *une seule* droite u rencontrant la courbe en une infinité de points. Et si tous les premiers mineurs de (abc) sont nuls, les quantités a_i, b_i, c_i sont proportionnelles, les équations paramétriques déterminent les rapports de x_1, x_2, x_3 et ne représentent plus qu'un seul point.

Donc, *quand la courbe rationnelle plane du second ordre dégénère, ce ne peut être qu'en deux droites coïncidentes ou en un seul point.*

Dans le premier cas, chaque point de la droite trouvée répond à deux valeurs t' et t'' du paramètre t, et l'on a

$$\frac{a_1t'^2 + 2b_1t' + c_1}{a_1t''^2 + 2b_1t'' + c_1} = \frac{a_2t'^2 + 2b_2t' + c_2}{a_2t''^2 + 2b_2t'' + c_2} = \frac{a_3t'^2 + 2b_3t' + c_3}{a_3t''^2 + 2b_3t'' + c_3}.$$

L'égalité des deux premiers rapports donne, en effectuant les calculs et divisant par $t' - t''$, généralement non nul,

$$2tt'(a_1b_2 - a_2b_1) + (t + t')(a_1c_2 - a_2c_1) + 2(b_1c_2 - b_2c_1) = 0,$$

ou, en appelant A_i, B_i, C_i les premiers mineurs de (abc),

$$2C_3tt' - B_3(t + t') + 2A_3 = 0.$$

En égalant le troisième rapport à l'un des deux premiers, on obtient les équations

$$2C_2tt' - B_2(t + t') + 2A_2 = 0,$$
$$2C_1tt' - B_1(t + t') + 2A_1 = 0,$$

identiques à la précédente, puisque, par hypothèse, (abc) est nul et que ses mineurs A_i, B_i, C_i sont donc proportionnels.

Quand les équations paramétriques représentent une droite, les couples de valeurs du paramètre qui donnent un même point de la droite sont en involution.

Nous avions étudié la courbe rationnelle plane du second degré en réponse à une question proposée dans *Mathesis* (1898, p. 117); nous avons complété cette étude pour le cas de la dégénérescence dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (octobre 1905). Signalons en passant cette thèse annexée à la

dissertation de M. F. Schuh (Amsterdam, 1905) : les notions « courbe rationnelle et courbe de genre nul » ne sont pas identiques.

6. Voyons l'usage du *lemme* précédent pour l'étude de la forme φ. Cherchons s'il existe deux points x_1 et x_2 de la première ponctuelle auxquels répondent les mêmes points y' et y'' de la seconde ponctuelle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\frac{ax_1^2 + hx_1 + g}{ax_2^2 + hx_2 + g} = \frac{hx_1^2 + bx_1 + f}{hx_2^2 + bx_2 + f} = \frac{gx_1^2 + fx_1 + c}{gx_2^2 + fx_2 + c}.$$

Considérons, dans un plan quelconque, trois coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3 liées à un paramètre x par les égalités

$$\rho X_1 = ax^2 + hx + g,$$
$$\rho X_2 = hx^2 + bx + f,$$
$$\rho X_3 = gx^2 + fx + c.$$

Elles définissent une courbe rationnelle du second ordre qui, d'après les conditions écrites à l'instant, doit avoir un point double et doit donc dégénérer. Cette circonstance se réalise (d'après notre lemme) quand on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

Alors la conique a une infinité de points doubles et les couples de valeurs de x qui donnent un même point double forment une involution représentée par l'équation

$$Gx_1x_2 - H(x_1 + x_2) + A = 0,$$

ou par deux autres égalités équivalentes à celle-ci.

Lorsqu'il existe un couple de valeurs de x *répondant aux mêmes points* y *par l'intermédiaire de la forme* φ, *il existe une infinité simple de couples* x *pareils, et tous ces couples sont en involution. Les couples de points* y *correspondants sont aussi en involution.*

Dans cette involution, les points de ramification sont évidemment conjugués deux à deux. Quant aux points doubles D_x^4, leur équation montre qu'ils coïncident deux à deux et constituent le couple de points doubles de l'involution. Il en résulte aussi que si les points de ramification d'une des ponctuelles coïncident avec ses points doubles D_x^4, on a $\Delta = 0$, et les points en question se confondent deux à deux.

Formes symboliques.

7. Si l'on essaye de représenter symboliquement la forme φ, on est tenté de partir d'une homographie du troisième ordre et du premier rang symétrique par rapport à deux séries de variables et d'éliminer la troisième variable. Mais, d'après ce qui a été dit au n° 3, la forme à laquelle on parvient ainsi est trop générale, c'est-à-dire qu'elle n'est pas symétrique, sauf dans des cas particuliers.

Si l'on part au contraire de la forme

$$a_x^2 b_y^2$$

à deux séries de variables et si l'on suppose, pour qu'il y ait symétrie, les symboles a et b équivalents, on a une forme trop peu générale, ou un cas particulier de la forme φ. En effet, la relation

$$a_x^2 a_y^2 = 0$$

représente les groupes polaires du second ordre des points y par rapport au groupe de quatre points $a_x^4 = 0$. Or, si l'on développe

$$a_x^2 a_y^2 \equiv (a_1 x + a_2)^2 (a_1 y + a_2)^2$$

et qu'on identifie à la forme

$$\varphi \equiv ax^2y^2 + bxy + c + hxy(x + y) + g(x^2 + y^2) + f(x + y),$$

on trouve, à un facteur constant près,

$$a = a_1^4, \quad b = 4a_1^2 a_2^2, \quad c = a_2^4, \quad h = 2a_1^3 a_2, \quad g = a_1^2 a_2^2, \quad f = 2a_1 a_2^3,$$

de sorte que $b = 4g$, ce qui constitue un cas particulier de la forme φ.

Réciproquement, si $b = 4g$, on peut calculer les coefficients de la forme a_x^4 en fonction de a, b, c, h, g, f.

En appliquant à cette forme $a_x^2 a_y^2$ la condition pour qu'elle représente une involution cubique (voir n° 3),

$$hf - bg = ac - g^2,$$

on trouve, en appelant a_1, a_2 et b_1, b_2 des symboles équivalents,

$$a_1^4 b_2^4 + 3a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2 - 4a_1 a_2^3 b_1^3 b_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)^4 = 0,$$

c'est-à-dire qu'alors l'invariant quartique de la forme a_x^4 s'évanouit. Donc, *les points d'une ponctuelle forment une involution cubique avec leurs seconds systèmes polaires relatifs à une forme quartique quand celle-ci représente quatre points équianharmoniques.*

8. En résumé, on a, dans l'ordre de généralité décroissante :

1. L'homographie du troisième ordre et du premier rang;

2. La même homographie, mais symétrique par rapport à deux des trois variables;

3. La forme φ doublement quadratique binaire et symétrique;

4. L'involution cubique, ou la forme φ dans le cas où la quantité $ac + bg - hf - g^2$ s'évanouit;

4'. La forme φ dans le cas où le déterminant Δ est nul;

4''. Les points d'une ponctuelle et leurs seconds systèmes polaires relatifs à une forme quartique binaire, ou la forme φ avec la condition $b = 4g$;

5. Les points d'une ponctuelle avec leurs seconds systèmes polaires relatifs à quatre points équianharmoniques, ou la forme φ avec les deux conditions $b = 4g$, $ac + 3g^2 - hf = 0$.

Application aux coniques.

9. Dans son *Traité des fonctions elliptiques*, Halphen a ramené l'étude d'un système de deux coniques d'un même plan à celle d'une forme doublement quadratique et symétrique.

Pour ne pas laisser de lacune dans notre travail, nous exposons ici cette question en suivant une marche différente.

Soit une conique c_2 représentée par les équations paramétriques

$$x_1 : x_2 : x_3 = \omega^2 : \omega : 1.$$

La droite qui joint deux points de paramètres ω' et ω'' a pour équation

$$x_1 - (\omega' + \omega'')x_2 + \omega'\omega''x_3 = 0.$$

Les coordonnées tangentielles de cette droite sont

$$u_1 : u_2 : u_3 = 1 : -(\omega' + \omega'') : \omega'\omega''.$$

Si les points ω' et ω'' se correspondent dans une forme φ, doublement quadratique et symétrique, on a

$$a\omega'^2\omega''^2 + b\omega'\omega'' + c + h\omega'\omega''(\omega' + \omega'') + g(\omega'^2 + \omega''^2) + f(\omega' + \omega'') = 0,$$

ou encore

$$a\omega'^2\omega''^2 + (b - 2g)\omega'\omega'' + c + h\omega'\omega''(\omega' + \omega'') + g(\omega' + \omega'')^2 + f(\omega' + \omega'') = 0,$$

et alors la droite $\omega'\omega''$ enveloppe la conique γ_2 représentée par

$$au_3^2 + (b - 2g)u_1u_3 + cu_1^2 - hu_2u_3 + gu_2^2 - fu_1u_2 = 0.$$

Réciproquement, les tangentes à une conique quelconque,

$$a'u_1^2 + b'u_2^2 + c'u_3^2 + 2h'u_1u_2 + 2g'u_1u_3 + 2f'u_1u_2 = 0,$$

déterminent, sur la conique c_2, des points ω', ω'' se correspondant dans une forme φ,

$$a' + b'(\omega' + \omega'')^2 + c'\omega'^2\omega''^2 - 2h'(\omega' + \omega'') + 2g'\omega'\omega'' - 2f'\omega'\omega''(\omega' + \omega'') = 0.$$

La forme φ a donc une importance géométrique : c'est la correspondance la plus générale déterminée sur une conique par les tangentes à une autre conique.

10. Si l'on prend un point arbitraire x sur c_2, on trouve les deux points correspondants y en menant du point choisi x les deux tangentes à γ_2 et en les prolongeant jusqu'à ce qu'elles recoupent c_2.

Les points de ramification R sont évidemment les points communs aux deux coniques; les points doubles D sont les secondes intersections, avec c_2, des tangentes à γ_2 menées par les points communs R. Les points C sont les contacts, sur c_2, des tangentes communes aux deux coniques. Les points Q sont les intersections, avec c_2, des secondes tangentes à γ_2 menées par les points C.

D'après le n° 4, les points y qui répondent à un même point x se correspondent dans une forme φ. On retrouve donc ce théorème connu (*) : *Si un triangle mobile est inscrit dans une conique* c_2 *et si deux de ses côtés touchent une conique* γ_2, *le troisième côté enveloppe une conique.*

11. Lorsque la forme φ représente une involution cubique, c'est-à-dire quand $ac + bg - hf - g^2$ s'évanouit, il y a une infinité de triangles inscrits à c_2 et circonscrits à γ_2.

Si, d'autre part, le déterminant Δ est nul, il existe une infinité de couples de points x sur c_2, tels que les points de chaque couple répondent aux deux mêmes points y; donc il y a une infinité simple de quadrilatères inscrits à c_2 et circonstrits à γ_2 (quadrilatères de Poncelet).

Pour que la forme φ se compose d'une ponctuelle et des seconds systèmes polaires de ses éléments par rapport à un groupe de quatre points, il faut et il suffit (voir n° 7) que l'on ait $b = 4g$; donc que le coefficient $b - 2g$ du terme en u_1u_3 soit double du coefficient de u_2^2 dans l'équation de γ_2. Mais si l'on considère que l'équation de c_2 est $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, la présente condition est l'évanouissement de l'invariant simultané exprimant qu'il y a ∞^1 triangles inscrits à c_2 et conjugués par

---

(*) Voir Salmon, *Sections coniques.*

rapport à γ_2, en d'autres termes que c_2 est harmoniquement circonscrite à γ_2.

Donc, *si l'on a, sur une conique* c_2, *un groupe de quatre points fixes et si l'on joint un point variable de cette conique aux éléments de son second système polaire par rapport au groupe de quatre points, ces droites enveloppent une conique* γ_2 *harmoniquement inscrite à* c_2. Les tangentes communes à c_2 et γ_2 touchent c_2 aux quatre points fixes donnés.

Réciproquement, si une conique γ_2 est harmoniquement inscrite à c_2, les tangentes à γ_2 menées d'un point quelconque x de c_2 coupent encore c_2 en deux points formant le second système polaire de x par rapport aux quatre contacts, sur c_2, des tangentes communes à c_2 et γ_2.

Si, en même temps, il y a involution, c'est-à-dire s'il y a des triangles inscrits à c_2 et circonscrits à γ_2, on sait que c_2 est alors aussi harmoniquement inscrite à γ_2 et, d'après le n° 7, les quatre contacts sur c_2 des tangentes communes aux deux courbes forment un groupe équianharmonique. Comme alors les coniques jouent, l'une par rapport à l'autre, le même rôle et comme on peut évidemment appliquer le principe de dualité, on retrouve ce théorème connu : Si deux coniques sont harmoniquement inscrites l'une à l'autre, leurs tangentes communes et leurs points communs forment des groupes équianharmoniques sur chacune d'elles.

12. On sait que si H est le hessien d'une forme biquadratique binaire f, l'involution $f + \lambda H$ se décompose de trois manières en une involution quadratique.

Réciproquement, si une involution I_1^4 se décompose de trois manières en involution quadratique, le hessien d'un quaterne quelconque appartient à l'involution; en effet, une involution pareille est déterminée par un seul de ses quaternes, puisque, en décomposant le quaterne, de trois manières, en deux couples de points, on définit les trois involutions quadratiques.

Voici l'usage que l'on peut faire de cette réciproque : les deux coniques c_2 et γ_2 peuvent toujours être projetées suivant

deux coniques homofocales. Leurs intersections sont alors symétriques deux à deux par rapport aux axes communs des deux coniques. Il en est de même des secondes intersections de l'une des coniques avec les tangentes menées à l'autre par leurs points communs, et aussi des contacts C, sur chacune des courbes, de leurs tangentes communes (isotropes), et enfin des intersections de l'une des coniques avec les secondes tangentes menées à l'autre des points C. Ces quatre quaternes de points se répartissent de trois manières en une même involution quadratique.

Donc, dans toute forme φ *doublement quadratique et symétrique, les groupes de points* C_x^4, D_x^4, Q_x^4, R_x^4 *et leurs hessiens font partie d'une même involution du quatrième ordre, se décomposant de trois manières en une involution quadratique.*

13. Puisqu'il a été question de coniques harmoniquement associées (n° 11), signalons en passant les propriétés suivantes, peut être nouvelles en partie et dont la démonstration est aisée, surtout si l'on rapporte les courbes à leur triangle conjugué commun :

Dans tout faisceau ponctuel de coniques, il y a une courbe c' *harmoniquement circonscrite à une courbe donnée* c *du faisceau; il y a deux coniques* c_1 *et* c_2 *harmoniquement inscrites à la courbe donnée* c.

Dans le faisceau, les coniques c_1 *et* c_2 *séparent harmoniquement* c *et* c'. Donc, *quand dans le faisceau il n'y a qu'une courbe harmoniquement inscrite à* c, *elle lui est aussi harmoniquement circonscrite.*

L'énoncé corrélatif va de soi.

Dans tout faisceau ponctuel (ou tangentiel) il y a deux courbes telles que chacune soit harmoniquement inscrite à l'autre.

Surface du quatrième ordre à cubique double.

14. Il est bon de donner ici quelques propriétés des surfaces réglées ayant pour génératrices des bisécantes d'une cubique gauche c_3. Soit F une telle surface.

Considérons une bisécante AB de c_3 qui ne soit pas génératrice de F; elle ne rencontre aucune autre génératrice de F, si ce n'est en A ou B sur la courbe; donc A et B sont des points multiples, d'ordres respectifs n et n' par exemple, et l'ordre de la surface est $n + n'$. Du point A, non plus que du point B, on ne peut mener qu'un nombre fini de génératrices, sinon la surface F se décomposerait et contiendrait, comme partie intégrante, le cône de sommet A ou B perspectif à c_3, hypothèse exclue en supposant que AB n'est pas génératrice de F. Donc il existe une infinité de points C de la cubique tels que, ni AC ni BC ne sont génératrices de F. Alors, puisque A est multiple d'ordre n, C est multiple d'ordre n', et comme B et C sont multiples d'ordre n', l'ordre de la surface est $2n'$. Par suite $n = n'$.

Ainsi *toutes les surfaces ayant pour génératrices des bisécantes d'une cubique gauche sont d'ordre pair* $2n$ *et ont la cubique comme courbe multiple d'ordre* n. Désignons une de ces surfaces par F_{2n}.

Réciproquement, toute surface d'ordre $2n$ qui a c_3 comme courbe multiple d'ordre n est réglée, car la bisécante issue d'un point quelconque de la surface possède, outre ce point, deux points n^{uples} sur F_{2n} et se trouve tout entière sur la surface.

Une semi-sécante issue d'un point A de c_3 rencontre F_{2n} en n points autres que A et coupe n génératrices ailleurs qu'en A, donc cette semi-sécante est dans n plans contenant une génératrice; par conséquent, les plans qui projettent de A les génératrices de F_{2n} enveloppent un cône de classe n.

Réciproquement, les bisécantes de c_3 tangentes à un cône de classe n ayant son sommet en A sur la courbe engendrent une surface ayant tout point B de la courbe comme point n^{uple}, car de ce point B on peut, en général, mener n bisécantes tangentes au cône de sommet A. Et la surface ainsi engendrée est de celles que nous avons appelées F_{2n}.

15. Quelques mots de géométrie projective montreront, d'une autre manière, comment la théorie des bisécantes d'une

cubique gauche revient à l'étude d'une gerbe ou d'un système plan.

Toutes les bisécantes qui rencontrent une même semi-sécante issue de A appartiennent à un même hyperboloïde circonscrit à c_3 et forment, sur cette quadrique, une série projective au faisceau des plans qui les projettent du point A.

Toutes les semi-sécantes issues de A et rencontrant une même bisécante définissent des quadriques circonscrites à c_3 et possédant en commun la bisécante; donc ces quadriques forment un faisceau. Celui-ci est projectif au faisceau des plans tangents en A; ce dernier a pour axe la tangente en A et est donc perspectif au faisceau des semi-sécantes.

Par là toute la géométrie des bisécantes et des quadriques circonscrites est rapportée à la géométrie de la gerbe A, ou d'une gerbe réciproque, ou d'un système plan projectif ou réciproque. Chaque théorème de géométrie plane se traduit par deux théorèmes sur la cubique : il suffit de remplacer le mot *point* (ou *droite*) par *bisécante* et le mot *droite* (ou *point*) par *quadrique circonscrite*.

Par exemple, on a le théorème de géométrie plane : si trois points M, N, P sont alignés, ainsi que trois autres points M′, N′, P′, les couples de droites MN′ et M′N, MP′ et M′P, NP′ et N′P se coupent en trois points en ligne droite. Cette propriété donne les deux suivantes :

1° Soient M, N, P trois quadriques circonscrites d'un même faisceau, M′, N′, P′ trois quadriques circonscrites d'un autre faisceau; les couples de bisécantes communes aux quadriques (M, N′) et (M′, N), (M, P′) et (M′, P), (N, P′) et (N′, P) déterminent trois quadriques circonscrites d'un même faisceau;

2° Soient M, N, P trois bisécantes d'une même quadrique circonscrite, M′, N′, P′ trois bisécantes d'une autre quadrique circonscrite; les couples de quadriques déterminées par (M, N′) et (M′, N), par (M, P′) et (M′, P), par (N, P′) et (N′, P) ont en commun trois bisécantes d'une même quadrique circonscrite.

Voici un autre exemple : si deux faisceaux projectifs de rayons

ont un élément correspondant commun, le lieu des intersections des rayons homologues est une droite. Donc :

1° Si deux séries projectives de bisécantes ont un élément correspondant commun, les couples de bisécantes homologues déterminent des quadriques circonscrites d'un même faisceau;

2° Si deux faisceaux projectifs de quadriques circonscrites ont un élément correspondant commun, le lieu des bisécantes communes à deux surfaces correspondantes est une quadrique.

Enfin, voici un dernier exemple qui donne un cas particulier de la surface F_{2n} du numéro précédent : dans un plan, le lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux projectifs sans élément correspondant commun est une courbe du second ordre. Donc :

1° Si l'on a deux faisceaux projectifs de quadriques circonscrites, le lieu des bisécantes intersections des surfaces homologues est une surface réglée ayant deux bisécantes communes avec toute quadrique circonscrite ou tout cône circonscrit, c'est-à-dire une surface F_4;

2° Si l'on a deux séries projectives de bisécantes, les quadriques déterminées par les couples de bisécantes homologues enveloppent une surface F_4.

16. L'étude analytique donnera de nouveaux points de vue. Si la cubique c_3 est donnée par les relations paramétriques :

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

une bisécante quelconque est représentée par les équations

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 &= 0, \\ \lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées plückériennes sont :

$$q_{12} : q_{13} : q_{14} : q_{23} : q_{24} : q_{34} = \lambda^2 : \lambda\mu : \lambda\nu : (\mu^2 - \lambda\nu) : \mu\nu : \nu^2.$$

Celles de ces bisécantes qui appartiennent à un complexe du n^{me} ordre,

$$f_n(q_{ij}) = 0,$$

satisfont à l'équation

$$f_n(\lambda^2,\ \lambda\mu,\ \lambda\nu,\ \mu^2 - \lambda\nu,\ \mu\nu,\ \nu^2) = 0.$$

Mais λ, μ, ν peuvent être regardées comme les coordonnées tangentielles, dans la gerbe A, du plan $\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$, qui projette la bisécante en question. Alors l'équation précédente est celle d'un cône de sommet A et de classe $2n$.

Les bisécantes d'une cubique gauche qui appartiennent à un complexe d'ordre n *sont tangentes à un cône de classe* 2n *ayant son sommet en un point quelconque de la courbe.* D'après le n° 14, *ces bisécantes engendrent une surface* F_{4n}.

L'équation de cette surface s'obtient très simplement, car les équations de la bisécante donnent

$$\lambda : \mu : \nu = (x_2x_4 - x_3^2) : (x_2x_3 - x_1x_4) : (x_1x_3 - x_2^2);$$

en substituant ces valeurs dans la relation $f_n = 0$ de plus haut, on a l'équation de F_{4n}.

En particulier, les bisécantes de c_3 qui touchent une surface de classe n ou qui rencontrent une courbe gauche d'ordre n engendrent une surface F_{4n}. Mais tout ceci n'est vrai que dans le cas le plus général : exceptionnellement il peut arriver que la surface se décompose en un ou plusieurs cônes perspectifs à la cubique c_3 et en une surface d'ordre moindre que $4n$.

17. Un complexe d'ordre n a généralement plus de constantes qu'un cône de classe $2n$, de sorte que les génératrices d'une surface F_{4n} appartiennent à une infinité de complexes d'ordre n. Excepté si $n = 1$: le cône de seconde classe a cinq constantes comme le complexe linéaire. Ainsi, tout cône de seconde classe, représenté en coordonnées tangentielles λ, μ, ν par

$$b_{11}\lambda^2 + b_{22}\mu^2 + b_{33}\nu^2 + 2b_{12}\lambda\mu + 2b_{13}\lambda\nu + 2b_{23}\mu\nu = 0,$$

peut être identifié au complexe linéaire

$$\Sigma a_{ij}q_{ij} \equiv a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda\mu + a_{14}\lambda\nu + a_{23}(\mu^2 - \lambda\nu) + a_{24}\mu\nu + a_{34}\nu^2 = 0.$$

Effectivement, il suffira d'écrire

$$a_{12} : a_{13} : (a_{14} - a_{23}) : a_{23} : a_{24} : a_{34} = b_{11} : 2b_{12} : 2b_{13} : b_{22} : 2b_{23} : b_{33},$$

ou

$$a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34} = b_{11} : 2b_{12} : (2b_{13} + b_{22}) : b_{22} : 2b_{23} : b_{33}.$$

Donc les génératrices de toute surface F_4 sont rayons d'un complexe linéaire. Celui-ci est spécial si l'on a

$$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$

ou

$$b_{11}b_{33} - 4b_{12}b_{23} + b_{22}(2b_{13} + b_{22}) = 0.$$

Alors la surface F_4 est engendrée par les bisécantes de c_3 qui s'appuient sur une droite.

Si l'on écrit en abrégé

$$X_1 : X_2 : X_3 = (x_2x_4 - x_3^2) : (x_2x_3 - x_1x_4) : (x_4x_3 - x_2^2),$$

l'équation de la surface F_4 la plus générale est

$$\Sigma b_{ij}X_iX_j = 0, \qquad (b_{ij} = b_{ji}).$$

La cubique c_3 étant donnée, cinq bisécantes définissent la surface, puisque cinq bisécantes déterminent un cône de seconde classe qui les touche. Cinq points hors de la cubique déterminent F_4, puisque de ces cinq points partent cinq bisécantes. La développable osculatrice de c_3 appartient au système de surfaces F_4, car son équation est $X_2^2 - X_1X_3 = 0$. Deux surfaces F_4 se coupent suivant c_3 et suivant quatre bisécantes, car deux cônes de seconde classe et de même sommet ont quatre plans tangents communs. Donc, parmi les génératrices de F_4, il y a, en général, quatre tangentes à c_3.

Le complexe linéaire auquel appartiennent les génératrices de F_4 définit un système focal; dans ce système, la surface F_4 est sa propre homologue. Car, soit P un point de F_4; son plan focal contient la génératrice de F_4 passant par P et est donc un plan tangent à F_4; et inversement. Dans ce système focal, la cubique c_3, lieu des points doubles, répond à une développable de troisième classe, enveloppe des plans tangents doubles.

Les génératrices de F_4 sont projetées, de deux points A et B de la cubique, suivant des plans homologues de deux gerbes collinéaires et, puisque ces plans touchent deux cônes de seconde classe, ils forment des faisceaux collinéaires de second ordre. Réciproquement, deux systèmes projectifs de plans tangents à deux cônes de seconde classe (A) et (B) appartiennent à deux gerbes collinéaires et déterminent, par leur intersection, des bisécantes d'une cubique gauche ; comme ces bisécantes sont tangentes au cône (A), elles engendrent une surface F_4.

Corrélativement, la surface F_4 est engendrée par les rayons qui joignent les points homologues de deux ponctuelles projectives ayant pour supports deux coniques dans des plans différents. Ce mode de génération est habituellement pris pour point de départ et définition dans l'exposé de la théorie des surfaces du quatrième ordre à cubique double.

Cinq bisécantes et un point déterminent une cubique gauche; cinq bisécantes définissent une congruence linéaire de ces courbes (voir Étude II) et déterminent, sur chacune d'elles, une surface F_4 ; les génératrices de toutes ces surfaces F_4 appartiennent toutes au complexe linéaire défini par les cinq bisécantes données. Par suite aussi une surface F_4 est déterminée par cinq génératrices et un point double.

18. Dans le complexe linéaire

$$\Sigma a_{ij} q_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \alpha_{ij} p_{ij} = 0,$$

le plan focal d'un point y a pour coordonnées

$$\sigma u_i = \Sigma_{j=1}^{j=4} \alpha_{ij} y_j,$$

en supposant que l'on ait posé

$$\alpha_{ij} = \frac{d}{da_{ij}} (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}) \qquad (\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}).$$

Si y est un point de c_3, de paramètre θ, on a

$$\sigma u_i = \Sigma_{j=1}^{j=4} \alpha_{ij} \theta^{4-j}.$$

Les paramètres des intersections de ce plan avec la cubique sont les racines de l'équation en ω,

$$\Sigma_{i=1}^{i=4} u_i \omega^{4-i} = 0,$$

ou

$$\Sigma_{i=1}^{i=4} \Sigma_{j=1}^{j=4} \alpha_{ij} \omega^{4-i} \theta^{4-j} = 0.$$

Si l'on développe et si l'on divise par $\omega - \theta$, on a

$$\alpha_{12}\theta^3\omega^2 + \alpha_{13}\theta\omega(\theta + \omega) + \alpha_{14}(\theta^2 + \theta\omega + \omega^2) + \alpha_{24}(\omega + \theta) + \alpha_{23}\theta\omega + \alpha_{34} = 0.$$

C'est une forme φ, doublement quadratique et symétrique, exprimant la relation entre deux points θ et ω de la cubique situés sur une même génératrice de F_4. On pouvait arriver à ce résultat en appliquant les raisonnements du paragraphe précédent au cône (A), tangent à F_4, et au cône de même sommet perspectif à la cubique.

Les points de ramification R sont les points où le cône (A) coupe la cubique ailleurs qu'en A ; pour chacun de ces points R, le plan focal touche la cubique en un point D autre que R ; ou encore, par chacun des points R passe une seule génératrice de F_4 s'appuyant encore sur c_3 en un des points doubles D.

Les points C sont les contacts des génératrices de F_4, qui sont tangentes à c_3. De chacun de ces points part une autre génératrice qui va recouper c_3 en un des points Q.

On peut, de trois manières, joindre deux à deux les points C, les points D, les points R et les points Q et obtenir des groupes de huit bisécantes appartenant chaque fois à un même système réglé.

D'après le n° 4, si de chaque point P de la cubique on mène les deux génératrices PM, PN de la surface F_4, la bisécante MN engendre aussi une autre surface F_4 ayant la même cubique c_3 comme courbe double.

19. Ces deux dernières surfaces coïncident quand la forme φ représente une involution ou quand les génératrices de F_4 appartiennent à un complexe linéaire spécial.

Dans un autre cas, les génératrices de F_4 forment une infinité

simple de quadrilatères gauches inscrits à c_5 ; ceci se présente quand on a

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} + \alpha_{14} & \alpha_{24} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

Les cônes de sommet A tangent à F_4 et perspectif à c_5 sont coupés par un plan suivant deux coniques. Dans le cas particulier qui nous occupe, il existe des quadrilatères de Poncelet circonscrits à la première de ces coniques et inscrits dans la seconde.

Enfin, nous avons vu la condition ($b = 4g$) pour qu'une forme φ se réduise au système des secondes polaires d'une ponctuelle par rapport à une forme biquadratique. En appliquant cette condition à la forme en θ et ω du n° 18, on trouve

$$\alpha_{23} = 5\alpha_{14}.$$

Mais la cubique gauche c_5 définit un complexe linéaire auquel appartiennent ses tangentes et dont l'équation est

$$\Sigma\beta_{ij}p_{ij} \equiv p_{14} - 5p_{23} = 0.$$

En écrivant la condition $\Sigma\alpha_{ij}\beta_{4-i,\,4-j} = 0$ pour que ce complexe soit en involution avec celui qui contient les génératrices de F_4, on retrouve la relation

$$\alpha_{23} = 5\alpha_{14}.$$

On peut donc énoncer les propriétés suivantes, probablement nouvelles :

Lorsque le complexe linéaire auquel appartiennent les génératrices de F_4 *et celui qui est défini par la cubique* c_5 *sont en involution, le cône ayant son sommet en un point quelconque A de* c_5, *et circonscrit à* F_4, *est harmoniquement inscrit à celui qui projette* c_5 *du même point; les génératrices de* F_4 *menées d'un point* P *de la courbe* c_5 *la rencontrent encore en deux points qui forment le second système polaire de* P *relativement aux quatre contacts des tangentes de* c_5 *qui appartiennent à* F_4.

Si en outre le complexe défini par F_4 est spécial, on a ce cas particulier (connu, au moins en partie).

Les tangentes de la cubique gauche appartiennent à un complexe linéaire; les quatre tangentes de la cubique qui rencontrent un rayon de ce complexe forment un système équianharmonique; les bisécantes qui rencontrent un rayon de ce complexe touchent un cône de seconde classe ayant son sommet en un point quelconque de c_3 et ce cône est harmoniquement inscrit à celui qui projette c_3 du même point.

V

Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques.

L'idée première du présent travail nous a été fournie par une question que nous a posée M. J. Massau : il s'agit de savoir quand l'équation d'une certaine surface du sixième ordre peut être mise sous forme de déterminant. On trouvera, dans nos derniers paragraphes, la réponse à cette question, que M. Massau a lui-même résolue d'autre manière et qui intéresse l'intégration graphique.

Dans cette recherche, nous avons dû nous poser certains problèmes relatifs à des quadrilatères de Steiner dans la quartique plane à deux nœuds. Cette théorie se rattache à notre *Étude IV* ci-dessus; seulement la forme φ cesse d'être symétrique et les variables sont considérées comme des coordonnés dans un plan. Les résultats obtenus en suggèrent à leur tour d'autres concernant des courbes planes à plus de deux nœuds, des courbes gauches et des surfaces du quatrième ordre.

Nous avons fait paraître un fragment de la présente Étude dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (octobre et novembre 1905).

Quadrilatères de Steiner dans les quartiques planes binodales.

1. Précisons et complétons le cas particulier du célèbre théorème de Steiner que nous nous proposons d'établir :

Une quartique plane binodale n'est pas, en général, circonscrite à un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds; mais, lorsqu'il existe un quadrangle pareil, il y en a une infinité. Dans

ce cas, le troisième point diagonal décrit une conique et les côtés du quadrangle qui ne passent pas par les nœuds enveloppent une courbe de quatrième classe.

Supposons les nœuds aux sommets x_1x_2 et x_1x_3 du triangle de référence. L'équation de la quartique est de la forme

$$\varphi \equiv x_3^2(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) + 2x_3x_1(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) + x_1^2(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0,$$

ou, en posant $x_2 = \xi x_1$, $x_3 = \eta x_1$,

$$\varphi \equiv \eta^2(a_1\xi^2 + 2b_1\xi + c_1) + 2\eta(a_2\xi^2 + 2b_2\xi + c_2) + (a_3\xi^2 + 2b_3\xi + c_3) = 0.$$

Pour qu'il existe un quadrangle inscrit dont deux points diagonaux soient aux nœuds, il faut que, pour deux valeurs, ξ_1 et ξ_2, de ξ, on ait les mêmes valeurs de η_1; il faut donc que les relations ci-après soient compatibles en ξ_1 et ξ_2,

$$\frac{a_1\xi_1^2 + 2b_1\xi_1 + c_1}{a_1\xi_2^2 + 2b_1\xi_2 + c_1} = \frac{a_2\xi_1^2 + 2b_2\xi_1 + c_2}{a_2\xi_2^2 + 2b_2\xi_2 + c_2} = \frac{a_3\xi_1^2 + 2b_3\xi_1 + c_3}{a_3\xi_2^2 + 2b_3\xi_2 + c_3}.$$

Considérons, dans un autre plan, trois coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3, liées à un paramètre ξ par les égalités

$$\rho X_i = a_i\xi^2 + 2b_i\xi + c_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Elles définissent une courbe rationnelle du second ordre qui, d'après les conditions précédentes, doit avoir un point double, donc dégénérer. D'après notre Étude IV, cette circonstance se réalise quand on a

$$\Delta \equiv (abc) = 0.$$

Alors la conique a une infinité de points doubles et les couples de valeurs de ξ qui donnent un même point double forment une involution, représentée par une des trois égalités suivantes, équivalentes entre elles, où A_i, B_i, ... représentent les mineurs du déterminant Δ (voir notre Étude IV) :

$$2A_i - B_i(\xi_1 + \xi_2) + 2C_i\xi_1\xi_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Par suite, si la quartique binodale possède un quadrangle inscrit, on a $\Delta = 0$; elle possède donc une infinité de quadrangles inscrits dont les couples de côtés passant par le nœud x_1x_2 sont en involution, et cette involution est représentée par une des égalités ci-dessus ou par

$$2A_ix_1'x_1'' - B_i(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') + 2C_ix_2'x_2'' = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De même les couples de côtés passant par x_1x_3 forment une involution représentée par une des équations suivantes, équivalentes entre elles :

$$\begin{aligned}
&2A_1x_1'x_1'' - A_2(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + 2A_3x_3'x_3'' = 0,\\
&2B_1x_1'x_1'' - B_2(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + 2B_3x_3'x_3'' = 0,\\
&2C_1x_1'x_1'' - C_2(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + 2C_3x_3'x_3'' = 0.
\end{aligned}$$

2. Avant de poursuivre la démonstration du théorème du numéro précédent, faisons quelques remarques.

Le déterminant Δ étant nul, il existe une relation linéaire entre les polynômes

$$a_ix_2^2 + 2b_ix_2x_1 + c_ix_1^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

figurant dans l'équation $\varphi = 0$. L'évanouissement de ces polynômes représente donc trois couples de la première involution trouvée ci-dessus. De même, on peut ordonner φ par rapport à x_2 et l'on trouve que

$$\begin{aligned}
&a_1x_3^2 + 2a_2x_3x_1 + a_3x_1^2 = 0,\\
&b_1x_3^2 + 2b_2x_3x_1 + b_3x_1^2 = 0,\\
&c_1x_3^2 + 2c_2x_3x_1 + c_3x_1^2 = 0
\end{aligned}$$

représentent trois couples de la seconde involution.

Pour la simplicité, nous dirons que la courbe φ est *quadrillée* quand elle est circonscrite à des quadrangles ayant deux points diagonaux aux nœuds. La remarque précédente donne alors l'énoncé que voici :

Soient une quartique binodale φ, la première polaire d'un de ses nœuds et le couple de tangentes en ce nœud; ces trois figures

sont coupées par une droite quelconque, issue du second point double, en trois couples de points (autres que les nœuds). Si ces trois couples de points sont en involution, il en est de même des trois couples de points analogues obtenus en intervertissant les rôles des points doubles. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la courbe φ est quadrillée.

Voici encore un corollaire évident :

Si la courbe φ est quadrillée, toutes les droites issues d'un nœud la coupent en des couples de points qui sont projetés de l'autre nœud suivant des couples de rayons en involution. Réciproquement, si trois couples de rayons pareils, issus d'un même nœud, sont en involution, tous le sont, aussi bien pour l'un que pour l'autre nœud, et la courbe est quadrillée.

Un élément double d'une de ces involutions correspond à des tangentes issues de l'autre nœud et donne un quadrangle réduit à un segment de droite. Aussi, *pour qu'une courbe φ soit quadrillée, il faut et il suffit que les contacts de deux tangentes issues de l'un des nœuds soient alignés sur l'autre.*

Soit, pour fixer les idées,

$$a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2 \equiv \lambda(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) + \mu(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2)$$

la relation identique qui lie trois couples de l'involution en x_2x_1.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\varphi \equiv (a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2)(x_2^2 + \lambda x_1^2) + (a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2)(2x_2x_1 + \mu x_1^2) = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2 & a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2 \\ -(2x_3x_1 + \mu x_1^2) & x_3^2 + \lambda x_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, l'évanouissement d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) \\ \varphi_1(x_1, x_3) & \varphi_2(x_1, x_3) \end{vmatrix}$$

dont les éléments sont des formes quadratiques représente une

quartique binodale quadrillée. Car les quatre points communs aux deux couples de droites

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0$$

vérifient l'équation de la courbe et, quel que soit k, ce sont les sommets d'un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds. Donc, *pour qu'une quartique binodale soit quadrillée, il faut et il suffit que le premier membre de son équation puisse se mettre sous forme d'un déterminant de quatre fonctions quadratiques, où* x_3 *manque dans une ligne et* x_2 *dans l'autre.*

D'après les relations

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0,$$

les deux involutions décrites par les couples de côtés opposés des quadrangles inscrits sont projectives.

3. Passons à la recherche du lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits : nous venons de voir que les couples de côtés opposés d'un quadrangle sont

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0.$$

Un des côtés du triangle diagonal est $x_1 = 0$; les autres sont respectivement les droites polaires du nœud x_1x_3 par rapport au couple de droites $f_1 + kf_2$ et du nœud x_1x_2 par rapport au couple de droites $\varphi_1 + k\varphi_2$; les équations de ces polaires sont

$$\frac{df_1}{dx_2} + k\frac{df_2}{dx_2} = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx_3} + k\frac{d\varphi_2}{dx_3} = 0,$$

et leur intersection (troisième point diagonal) décrit la conique

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_2} & \dfrac{df_2}{dx_2} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_3} & \dfrac{d\varphi_2}{dx_3} \end{vmatrix} \equiv \frac{d^2\varphi}{dx_2dx_3} = 0.$$

Le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits

dans la quartique quadrillée φ est la conique polaire de l'un des nœuds par rapport à la cubique polaire de l'autre.

Cette conique touche, en chaque nœud, la polaire du second point double relative aux deux tangentes au premier. Son équation développée est

$$a_1x_3x_2 + b_1x_3x_1 + a_2x_2x_1 + b_2x_1^2 = 0.$$

Si l'on calcule son discriminant, on trouve

$$-a_1(a_1b_2 - a_2b_1) \quad \text{ou} \quad -a_1C_3.$$

La courbe dégénère si l'on a $a_1 = 0$ ou $C_3 = 0$. Dans le premier cas, la quartique φ se décompose en une droite x_1 et une cubique; écartons provisoirement cette hypothèse. La propriété de la conique $\frac{d^2\varphi}{dx_2dx_3}$ de se réduire à deux droites est indépendante du choix du triangle fondamental; mais l'équation $\varphi = 0$ ne conserve la même forme que si deux des sommets de ce triangle sont aux nœuds. La quantité C_3 est donc invariante pour les transformations de coordonnées qui déplacent seulement le sommet x_2x_3. Nous supposerons d'abord C_3 non nul; le cas de $C_3 = 0$ sera examiné plus tard.

4. Avant d'étudier l'enveloppe des côtés des quadrangles qui ne passent pas par les nœuds (dans l'hypothèse $C_3 \gtrless 0$), il convient d'examiner la correspondance entre les sommets opposés des quadrangles.

Les équations des involutions en x_2, x_1 et x_3, x_1 peuvent s'écrire, par exemple, sous la forme suivante, donnée au n° 1 :

$$2A_3x_1'x_1'' - B_3(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') + 2C_3x_2'x_2'' = 0,$$
$$2C_1x_1'x_1'' - C_2(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + 2C_3x_3'x_3'' = 0.$$

De ces relations on peut tirer les coordonnées du sommet x', proportionnelles à des fonctions quadratiques des coordonnées du sommet opposé x'', ou inversement. Donc, *les sommets opposés des quadrangles se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique.*

Puisque C_3 n'est pas nul, les équations précédentes définiront une simple *inversion* si l'on déplace le sommet x_2x_3 du triangle de référence de manière à annuler B_2 et C_2, ce qui revient à prendre pour côtés x_2 et x_3 du triangle de référence les rayons conjugués de x_1 dans les deux involutions.

Supposons que cette transformation ait été faite et que les deux involutions soient désormais représentées par

$$x_2'x_2'' = cx_1'x_1'', \quad x_3'x_3'' = ax_1'x_1''.$$

Leurs rayons doubles ont pour équations

$$x_2 = \pm x_1\sqrt{c}, \quad x_3 = \pm x_1\sqrt{a},$$

et l'on voit facilement que les couples de ces involutions se représentent par les équations suivantes, où λ et μ sont des paramètres variables,

$$x_2^2 + cx_1^2 - \lambda x_2x_1 = 0, \quad x_3^2 + ax_1^2 - \mu x_3x_1 = 0.$$

Ces deux involutions étant projectives, on a, par exemple,

$$\lambda\mu + 2n\lambda + 2m\mu + 4b = 0.$$

L'élimination de λ et μ donne l'équation de la courbe rapportée au triangle fondamental de l'inversion,

$$\varphi \equiv (x_3^2 + 2nx_3x_1 + cx_1^2)(x_2^2 + 2mx_2x_1 + cx_1^2) + 4(b - mn)x_3x_2x_1^2 = 0,$$

le binôme $b - mn$ est le mineur C_3 du déterminant Δ et, par hypothèse, il n'est pas nul.

Dans une quartique binodale quadrillée, les sommets opposés d'un quadrangle inscrit sont des points homologues d'une inversion trilinéaire dont les points fondamentaux sont les points diagonaux du quadrangle déterminé par les intersections des rayons doubles des deux involutions.

Avec les nouvelles notations, la conique, lieu du troisième point diagonal des quadrangles, a pour équation

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{dx_3dx_2} \equiv x_3x_2 + mx_3x_1 + nx_2x_1 + bx_1^2 = 0.$$

Cette conique est donc indépendante des quantités a et c que l'on peut appeler puissances des deux involutions.

5. Pour obtenir l'enveloppe des diagonales des quadrangles inscrits, prenons les deux involutions projectives que fournit l'équation de φ, sous la forme du n° 4 :

$$x_3^2 + 2(n - \lambda)x_3x_1 + ax_1^2 = 0,$$
$$\lambda x_2^2 + 2(m\lambda + b - mn)x_2x_1 + \lambda x_1^2 = 0.$$

Une droite u donnée par l'équation

$$x_3 = -\frac{u_2x_2 + u_1x_1}{u_3}$$

coupe la première involution en des couples de points qui, projetés du nœud x_1x_2, donnent cette troisième involution

$$(u_2x_2 + u_1x_1)^2 - 2(n - \lambda)u_3x_1(u_2x_2 + u_1x_1) + au_3^2x_1^2 = 0.$$

Pour que la droite u soit diagonale d'un quadrangle inscrit, il faut que la seconde et la troisième involution aient un couple commun correspondant à une même valeur de λ, donc que l'on ait

$$\frac{u_2^2}{\lambda} = \frac{u_2u_1 - (n - \lambda)u_2u_3}{m\lambda + b - mn} = \frac{u_1^2 - 2(n - \lambda)u_1u_3 + au_3^2}{\lambda c}.$$

En égalant le premier rapport au troisième et au second, il vient, après réduction

$$(I)\quad \begin{cases} 2\lambda u_1u_3 = cu_2^2 - au_3^2 - u_1^2 + 2nu_1u_3, \\ \lambda^2u_3 - \lambda(mu_2 + nu_3 - u_1) - (b - mn)u_2 = 0. \end{cases}$$

L'élimination simple de λ donne une équation du quatrième degré en u.

Pour que la droite u soit diagonale de deux quadrangles, il faut que les équations (I) soient vérifiées par deux valeurs de λ ou que la première de ces équations soit indéterminée, donc que l'on ait

$$u_1u_3 = 0, \quad cu_2^2 - au_3^2 - u_1^2 + 2nu_1u_3 = 0.$$

Il faut écarter l'hypothèse $u_3 = 0$, puisque nous avons précédemment divisé par u_3, donc

$$u_1 = 0, \quad cu_2^2 - au_3^2 = 0$$

représentent deux droites qui sont à la fois diagonales de deux quadrangles inscrits et, par suite, tangentes doubles à l'enveloppe.

Pour une de ces droites, les seconde et troisième involutions considérées précédemment ont deux couples communs, par suite tous leurs couples communs et aussi mêmes éléments doubles. Ceci explique pourquoi chacune des tangentes singulières

$$u_1 = 0, \quad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c},$$

est diagonale du quadrilatère formé par les rayons doubles de la première et de la seconde involution.

L'enveloppe des diagonales des quadrangles inscrits dans une quartique quadrillée φ est une courbe de quatrième classe Φ ayant pour tangentes doubles les diagonales du quadrilatère formé par les rayons doubles des involutions des côtés opposés des quadrangles inscrits à φ.

Toutefois, bien que, pour l'une des tangentes singulières, la seconde et la troisième involution aient tous leurs couples communs, elles n'ont que deux couples communs correspondant à la même valeur de λ; ces valeurs de λ s'obtiennent en faisant

$$u_1 = 0, \quad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c}$$

dans la seconde des relations (I) :

$$\lambda^2\sqrt{c} - \lambda(\pm m\sqrt{a} + n\sqrt{c}) \mp (b - mn)\sqrt{a} = 0.$$

Les deux valeurs de λ coïncident, pour l'une ou l'autre des tangentes singulières, si l'on a

$$(\pm m\sqrt{a} + n\sqrt{c})^2 \pm 4(b - mn)\sqrt{ac}$$
$$= am^2 + cn^2 \pm 2\sqrt{ac}(2b - mn) = 0.$$

Pour que les valeurs de λ coïncident pour les deux tangentes

singulières, c'est-à-dire pour qu'elles soient toutes deux inflexionnelles, il faut que l'on ait

$$am^2 + cn^2 = 0, \quad 2b - mn = 0.$$

Une courbe Φ de quatrième classe à deux tangentes doubles est en général du huitième ordre. Cet ordre s'abaisse d'une ou de deux unités quand une ou deux tangentes doubles deviennent inflexionnelles; comme on vient de le voir, cette circonstance peut se réaliser sans que l'on renonce à l'hypothèse $b \gtrless mn$.

L'enveloppe Φ des diagonales des quadrangles inscrits dans la quartique quadrillée φ est une courbe du huitième ordre qui peut s'abaisser au septième ou au sixième ordre.

Les équations (I) donnent, en multipliant la première par λ, la seconde par $2u_1$ et soustrayant,

$$\lambda(cu_2^2 - au_3^2 + u_1^2 - 2mu_1u_2) = 2(b - mn)u_1u_2.$$

Si l'on multiplie ensuite, membre à membre, cette relation et la première des égalités (I), on trouve l'équation tangentielle de la courbe Φ :

$$\Phi \equiv (cu_2^2 - au_3^2 + u_1^2 - 2mu_1u_2)(cu_2^2 - au_3^2 - u_1^2 + 2nu_1u_3) - 4(b - mn)u_1^2u_2u_3 = 0.$$

Sous cette forme, on peut voir que la courbe Φ ne possède que les deux tangentes singulières trouvées plus haut; en effet, un seul terme de son équation contient le coefficient b, lequel n'a pas, en général, de relation identique avec les autres coefficients. Si donc la courbe Φ possède des singularités tangentielles, elle les conserve quel que soit b, c'est-à-dire que les tangentes singulières appartiennent à toutes les courbes d'un certain faisceau tangentiel dont un élément est $u_1^2u_2u_3 = 0$; ce système a pour singularités ou bien $u_1 = 0$ et u_2, u_3 quelconques, ou bien $u_2 = u_3 = 0$; ces dernières valeurs ne vérifient pas $\Phi = 0$, donc on doit supposer $u_1 = 0$ et l'on en déduit $au_3^2 - cu_2^2 = 0$.

Transformons l'équation de Φ en prenant les tangentes

doubles pour côtés du triangle de référence; faisons donc la substitution

$$\sqrt{c}\,u_2 + \sqrt{a}\,u_3 = U_2 \qquad u_2 = \frac{U_2 + U_3}{2\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{c}\,u_2 - \sqrt{a}\,u_3 = U_3 \qquad u_3 = \frac{U_2 - U_3}{2\sqrt{a}}$$

$$u_1 = U_1$$

Il vient alors

$$\Phi \equiv [U_2U_3 + U_1^2 - \frac{m}{\sqrt{c}}U_1(U_2 + U_3)][U_2U_3 - U_1^2 + \frac{n}{\sqrt{a}}U_1(U_2 - U_3)]$$
$$- \frac{b - mn}{\sqrt{ac}}U_1^2(U_2^2 - U_3^2) = 0$$

ou, en ordonnant par rapport à U_3,

$$U_3^2\left[U_2^2 - \left(\frac{m}{\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\right)U_2U_1 + \frac{b}{\sqrt{ac}}U_1^2\right]$$
$$+ U_3U_1\left[-\left(\frac{m}{\sqrt{c}} - \frac{n}{\sqrt{a}}\right)U_2^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{c}} - \frac{n}{\sqrt{a}}\right)U_1^2\right]$$
$$+ U_1^2\left[-\frac{b}{\sqrt{ac}}U_2 + \left(\frac{m}{\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\right)U_2U_1 - U_1^2\right] = 0.$$

Le déterminant des coefficients

$$\begin{vmatrix} 1 & -\left(\frac{m}{\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\right) & \frac{b}{\sqrt{ac}} \\ -\left(\frac{m}{\sqrt{c}} - \frac{n}{\sqrt{a}}\right) & 0 & \frac{m}{\sqrt{c}} - \frac{n}{\sqrt{a}} \\ -\frac{b}{\sqrt{ac}} & \frac{m}{\sqrt{c}} + \frac{n}{\sqrt{a}} & -1 \end{vmatrix}$$

est visiblement nul; donc la courbe Φ possède la propriété corrélative de la quartique binodale quadrillée; en d'autres termes, elle est inscrite à ∞^1 quadrilatères, dont deux diagonales sont les tangentes doubles.

L'enveloppe Φ *des diagonales des quadrangles inscrits à une quartique binodale quadrillée est la polaire réciproque d'une quartique binodale quadrillée.*

6. On a vu que les sommets opposés des quadrangles inscrits dans la courbe φ se correspondent dans une inversion trilinéaire. Dans le cas où deux des points fondamentaux de l'inversion sont les points cycliques, l'inversion se réduit à une transformation par vecteurs réciproques accompagnée d'une homologie; en d'autres termes, cette inversion trilinéaire fait correspondre un point P à un point Q de la manière suivante : P répond à un point R dans une transformation par vecteurs réciproques et Q est le symétrique de R par rapport à un axe passant par le pôle de la première transformation.

Si une quartique plane bicirculaire est quadrillée, les sommets opposés réels P et Q d'un quadrangle inscrit se correspondent dans la transformation qui vient d'être décrite; la diagonale PQ et la seconde diagonale du quadrangle, c'est-à-dire la perpendiculaire au milieu de PQ, enveloppent une courbe de quatrième classe.

7. Reprenons l'équation

$$\varphi \equiv x_3^2(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) + 2x_3x_1(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) + x_1^2(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0.$$

Nous supposerons encore $a_1 \gtrless 0$; mais, par contre, le mineur C_3 de $\Delta \equiv (abc)$ ou $a_1b_2 - a_2b_1$ est à présent nul.

Nous pouvons toujours, et d'une seule manière, déplacer le sommet x_2x_3 du triangle de référence, de telle sorte que les coefficients a_2 et b_1 s'annulent, car la transformation des coordonnées remplace ces coefficients a_2 et b_1 par des fonctions linéaires des paramètres de la transformation. Ayant donc

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_2 = b_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 \gtrless 0,$$

on doit avoir aussi $b_2 = 0$ et le déterminant Δ se réduit à $-a_1b_3c_2$. Par suite, pour que la courbe φ soit quadrillée, il

faut que c_2 ou b_3 soit nul. L'équation se réduit alors à l'une des formes

$$x_3^2\chi(x_1, x_2) + x_1^2\psi(x_1, x_2) = 0,$$
$$x_2^2\chi_1(x_1, x_3) + x_1^2\psi_1(x_1, x_3) = 0.$$

Dans le premier de ces cas, chacune des droites $\chi(x_1, x_2) = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus au sommet x_1x_2, et ce sommet est alors un point double d'inflexion; dans le second cas, c'est le sommet x_1x_3 qui présente cette singularité. Il suffit évidemment de considérer un de ces cas, le premier par exemple.

Les involutions des côtés opposés des quadrangles inscrits s'écrivent, au moyen des mineurs de Δ,

$$\begin{cases} 2b_3c_1x_1y_1 - (a_1c_3 - a_3c_1)(x_1y_2 + x_2y_1) - 2a_1b_3x_2y_2 = 0, \\ 0x_1y_1 + b_3c_1(x_1y_3 + x_3y_1) + 0x_3y_3 = 0, \end{cases}$$

d'où la correspondance suivante entre sommets opposés x et y d'un quadrangle inscrit

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{2b_3c_1x_1 - (a_1c_3 - a_3c_1)x_2}{(a_1c_3 - a_3c_1)x_1 + 2a_1b_3x_2}, \quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{x_3}{x_1};$$

ces relations définissent une *semi-inversion trilinéaire.*

Le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits se réduit à $x_2x_3 = 0$, mais la droite $x_2 = 0$ répond à un seul quadrangle limite défini par $x_1^2 = 0$ et $a_1x_2^2 + c_1x_1^2 = 0$. Le véritable lieu géométrique est donc $x_3 = 0$, et ce fait est exprimé aussi par la seconde des équations de la semi-inversion.

Les involutions des côtés opposés peuvent encore s'écrire

$$x_3^2 - \lambda x_1^2 = 0,$$
$$x_2^2(a_3 + \lambda a_1) + 2b_3x_2x_1 + x_1^2(c_3 + \lambda c_1) = 0;$$

une droite

$$u_3 = -\frac{u_2x_2 + u_1x_1}{x_3}$$

coupe la première involution en des couples de points projetés de x_1x_2 suivant cette troisième involution :

$$u_2^2x_2^2 + 2u_2u_1x_2x_1 + x_1^2(u_1^2 - \lambda u_3^2) = 0.$$

La seconde et la troisième involution ont un couple correspondant commun si l'on a

$$\frac{u_2^2}{a_3 + \lambda a_1} = \frac{u_2 u_1}{b_3} = \frac{u_1^2 - \lambda u_3^2}{c_3 + \lambda c_1}.$$

En éliminant λ et faisant disparaître le facteur parasite u_2 répondant au nœud x_1x_3, on trouve une équation cubique en u.

Lorsque, dans une quartique binodale quadrillée, l'un des nœuds est un point double d'inflexion, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une droite, les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire et leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe.

Remarquons que, *si l'une des branches de la courbe passant par un point double y présente une inflexion et si la courbe est quadrillée, la seconde branche possède aussi une inflexion en ce point*, car les quatre tangentes issues du nœud considéré ont leurs contacts alignés deux à deux sur l'autre nœud; si donc un de ces contacts s'approche indéfiniment du premier nœud, il en est de même d'un autre de ces contacts.

Figures du quatrième degré à trois et quatre nœuds.

8. Tout le paragraphe précédent serait inexact si la condition $\Delta = 0$ équivalait à l'existence d'un troisième point double, car alors la propriété d'être quadrillée n'appartiendrait jamais à une quartique binodale. Mais il n'en est rien : admettons, en effet, que la courbe φ ait un troisième nœud au sommet x_2x_3, ce qui revient à supposer $c_3 = c_2 = b_2 = 0$. Le déterminant Δ se réduit à $-a_3b_2c_1$ et n'est pas identiquement nul.

Réservons toujours les cas où l'on a soit $a_3 = 0$, soit $c_1 = 0$ et où la courbe φ dégénère en une cubique et une droite x_2 ou x_3. Nous devons supposer $b_2 = 0$ et les tangentes

$$c_1x_3^2 + 0x_3x_2 + a_3x_2^2 = 0$$

au troisième nœud x_2x_3 sont alors séparées harmoniquement

par les deux premiers points doubles. Ainsi, *pour qu'une quartique trinodale possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux des nœuds, il faut et il suffit que ceux-ci séparent harmoniquement les tangentes au troisième nœud.*

Comme on le vérifie sans peine, la correspondance des sommets opposés des quadrangles est donnée par les relations

$$y_1 : y_2 : y_3 = a_2 b_1 (2a_2 x_3 + a_3 x_1)(2b_1 x_2 + c_1 x_1)$$
$$: -a_2 b_1 c_1 x_2 (2a_2 x_3 + a_3 x_1) : -a_2 a_3 b_1 x_3 (2b_1 x_2 + c_1 x_1).$$

C'est une inversion dont les points fondamentaux sont les deux nœuds considérés et le point commun aux droites

$$2a_2 x_3 + a_3 x_1 = 0, \quad 2b_1 x_2 + c_1 x_1 = 0.$$

Le troisième point diagonal des quadrangles décrit la conique

$$a_1 x_3 x_2 + b_1 x_3 x_1 + a_2 x_1 x_2 = 0;$$

elle ne dégénère que si l'un de ses coefficients s'annule, hypothèse que nous pouvons exclure provisoirement.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_3^2 & -2a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 \\ x_2^2 & a_1 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle montre les involutions projectives

$$\lambda x_3^2 - 2a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 = 0,$$
$$x_2^2 (a_1 + \lambda) + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 = 0,$$

dont la première, combinée avec l'équation d'une droite u, donne cette troisième involution :

$$x_2^2 \lambda u_2^2 + 2x_2 x_1 (\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3) + x_1^2 (\lambda u_1^2 + 2a_2 u_3 u_1 - a_3 u_3^2) = 0.$$

La seconde et la troisième involution ont un couple correspondant commun si l'on a

$$\frac{\lambda u_2^2}{a_1 + \lambda} = \frac{\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3}{b_1} = \frac{\lambda u_1^2 + 2a_2 u_3 u_1 - a_3 u_3^2}{c_1}.$$

Si l'on exprime que ces relations sont satisfaites par une

valeur de λ, on trouve, après simplification, une équation cubique en u. Les conditions pour que ces relations soient vérifiées par deux valeurs de λ donnent la tangente double de cette courbe de troisième classe :

$$c_1u_2 = b_1u_1, \quad a_3u_3 = a_2u_1.$$

Cette tangente double joint deux points représentés respectivement par ces deux dernières équations; ils sont situés sur les côtés x_3 et x_2 du triangle de référence et sur les droites respectives

$$c_1x_1 + b_1x_2 = 0, \quad a_3x_1 + a_2x_3 = 0,$$

c'est-à-dire sur les polaires de chacun des nœuds x_1x_3 et x_1x_2, relatives aux tangentes à l'autre.

Dans une quartique trinodale quadrillée, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une conique et les diagonales de ces quadrangles enveloppent une courbe de troisième classe possédant une tangente double.

Dans le cas, exclu plus haut, où l'on a soit $b_1 = 0$, soit $a_2 = 0$, les résultats, faciles à établir, se résument comme suit :

Un des nœuds est un point double d'inflexion; la courbe a deux séries de quadrangles inscrits ayant des points diagonaux en deux couples de nœuds; pour chaque série de quadrangles, les sommets opposés se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire, le troisième point diagonal décrit une droite et les diagonales enveloppent une conique.

Si l'on a simultanément $b_1 = 0$ et $a_2 = 0$, *il y a une série de quadrangles inscrits ayant leurs trois points diagonaux aux trois nœuds de la courbe; les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une collinéation; les trois nœuds sont des points doubles d'inflexion. Et, chaque fois qu'une quartique a trois points doubles d'inflexion, elle est ainsi triplement quadrillée.*

9. Nous avons toujours exclu le cas où la courbe φ dégénère en une droite et une cubique. Examinons à présent cette hypothèse et choisissons la droite en question pour côté x_1 du triangle

de référence. Les raisonnements précédents font découvrir, pour la cubique

$$x_3^2(2b_1x_2 + c_1x_1) + 2x_3(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) + x_1(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0,$$

un certain nombre de propriétés, la plupart connues. Pour cette raison, et aussi parce que les développements précédents indiquent assez quels calculs il faut faire, nous pouvons nous contenter d'énoncer les résultats.

La cubique possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux points M *et* N *de la courbe,* choisis comme sommets x_1x_2 et x_1x_3, *si l'on a*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En écartant d'abord le cas où $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, on voit qu'on peut faire évanouir c_1 et a_3, car il suffit de prendre pour côtés du triangle de référence les tangentes en M et N. Alors, pour que Δ soit nul, il faut que c_3 le soit, donc que la courbe passe par le point P de rencontre des tangentes en M et N; ainsi *les deux points* M et N *ont même tangentiel et,* par raison de symétrie, *il en est de même de deux sommets quelconques d'un quadrangle Steinérien. Le troisième point diagonal des quadrangles parcourt une droite; leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe; leurs sommets opposés se correspondent dans une inversion ayant* M, N, P *pour points fondamentaux.*

L'hypothèse $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ correspond au cas où l'un des points M, N est un point d'inflexion; elle entraîne quelques modifications faciles à énoncer.

Lorsque la quartique φ dégénère en une droite $x_3 = 0$ et une cubique ayant un point double x_1x_2, les coefficients a_3, b_3, c_3 s'évanouissent et le déterminant Δ est identiquement nul. Donc une cubique ayant un point double en M et une droite rencontrant la cubique en N ont une infinité de quadrangles inscrits

ayant deux points diagonaux en M et N; ceci est évident géométriquement : la droite donnée est un côté de tous ces quadrangles. Ainsi, *une cubique nodale et une droite ne passant pas par le nœud forment toujours un système quadrillé.*

10. Si, au lieu d'une quartique φ, on a un système de deux coniques circonscrites au triangle de référence,

$$(\alpha x_2x_3 + \beta x_3x_1 + \gamma x_1x_2)(\alpha' x_2x_3 + \beta' x_3x_1 + \gamma' x_1x_2) = 0,$$

les raisonnements du n° 8 s'appliquent : pour qu'il y ait des quadrangles inscrits à deux points diagonaux aux nœuds x_1x_2 et x_1x_3, il faut que le terme en $x_1^2x_2x_3$ manque dans l'équation ci-dessus ou que l'on ait

$$\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \beta : \gamma = -\beta' : \gamma'$$

et les tangentes aux deux coniques en leur troisième point commun $C(x_2 = x_3 = 0)$ doivent séparer harmoniquement les deux premiers points A et B. Évidemment, la même propriété doit exister pour les tangentes au quatrième point D.

D'après cela, les coniques données Γ_2 et Γ_2', appartenant au faisceau de coniques de base ABCD, y séparent harmoniquement les deux couples de droites AC, BD et AD, BC. Par suite, les tangentes à Γ_2 et Γ_2' en A (ou B) séparent harmoniquement C et D; donc il y a un second système de quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Le pôle de AB par rapport à la conique Γ_2 a pour coordonnées

$$-\alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Sa polaire relative à Γ_2' est

$$\alpha(\beta' x_3 + \gamma' x_2) + \beta(\alpha' x_3 + \gamma' x_1) + \gamma(\alpha' x_2 + \beta' x_1) = 0$$

ou, à cause de $\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0$,

$$x_2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + x_3(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0.$$

Cette droite n'est autre que CD, car son équation s'obtient

aussi en éliminant le terme en x_2x_3 des équations des deux coniques.

Il y a donc un point $M(-\alpha, \beta, \gamma)$ qui est à la fois pôle de AB pour Γ_2 et pôle de CD pour Γ'_2, et pareillement un point analogue $N(-\alpha', \beta', \gamma')$ pôle de AB pour Γ'_2 et de CD pour Γ_2.

Le troisième point diagonal des quadrangles inscrits à points diagonaux en A et B décrit la conique

$$2\alpha\alpha' x_2x_3 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)x_1x_2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)x_1x_3 = 0.$$

Elle passe par A, B, C, donc aussi par D; elle passe par M et N, comme on le vérifie sans peine, et, dans le faisceau des coniques ayant pour base ABCD, elle est séparée harmoniquement du couple de droites AB, CD par les coniques proposées Γ_2 et Γ'_2. Elle est aussi le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Deux sommets opposés d'un quadrangle inscrit, de la première série par exemple, sont toujours sur une même conique Γ_2 ou Γ'_2. Ceux qui sont sur Γ_2 sont projetés de A, suivant une involution dont AC et AD sont les rayons doubles; donc ces couples de sommets sont en involution sur la conique et sont alignés sur le pôle N de CD. Ainsi l'enveloppe des diagonales des quadrangles se réduit aux deux points M et N.

Les deux coniques se correspondent à elles-mêmes dans une inversion dont les points fondamentaux sont A, B et un troisième point E défini par les relations

$$\beta\beta' x_1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')x_2 = 0, \quad \gamma\gamma' x_1 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)x_3 = 0.$$

On vérifie très facilement que ce point est sur les deux droites CD et MN.

Pareillement, les deux coniques se conservent dans une inversion ayant pour points fondamentaux C, D et l'intersection F de AB et MN.

De ces deux transformations, la première fait correspondre, sur Γ_2, deux sommets opposés d'un quadrangle de la première série, donc deux points x et y alignés sur N. Soit alors G l'intersection de AB et CD et soient y et z deux points de Γ_2

alignés sur G; sur la conique Γ_2, les points x et z sont des éléments correspondants d'une involution, puisque N et G sont conjugués par rapport à la conique; le pôle de cette involution est le pôle de NG ou E; dans le plan, ces points x et z se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique; celle-ci est le produit de l'inversion ayant E, A, B pour points fondamentaux et de l'homologie ayant pour pôle G et pour axe MN ou EF. Dans cette transformation composée, les points fondamentaux de l'un des systèmes sont E, A, B et leurs homologues dans l'autre sont E, B, A; c'est donc une *transformation de Hirst.*

Il est facile d'écrire l'invariant simultané de deux coniques, qui doit s'annuler quand ces courbes forment un système quadrillé. En effet, le faisceau

$$a_x^2 + ka_x'^2 = 0$$

a pour discriminant

$$(abc)^2 + 3k(aba')^2 + 3k^2(aa'b')^2 + k^3(a'b'c')^2.$$

Les valeurs de k, qui annulent cette fonction, déterminent les coniques dégénérées du faisceau et, pour que le système soit quadrillé, il faut que deux valeurs de k soient égales et de signe contraire, ce qui exige l'évanouissement de

$$(abc)^2(a'b'c')^2 - 9(aba')^2(aa'b')^2.$$

Lorsque cette condition est vérifiée, la troisième valeur de k est égale à

$$-\frac{3(aba')^2}{(abc)^2}$$

et le couple de droites AB et CD est représenté par l'une des deux équations équivalentes

$$a_x^2(abc)^2 = 3a_x'^2(aba')^2 \quad \text{ou} \quad 3a_x^2(aa'b')^2 = a_x'^2(a'b'c')^2.$$

La conique ABCDMN est alors

$$a_x^2(abc)^2 = -3a_x'^2(aba')^2 \quad \text{ou} \quad 3a_x^2(aa'b')^2 = -a_x'^2(a'b'c')^2.$$

Faisons une remarque en passant. D'après ce qui précède et moyennant le principe de translation de Clebsch, les plans u qui coupent deux quadriques $a_x^2 = 0$ et $a_x'^2 = 0$ suivant deux coniques formant un système quadrillé enveloppent une surface de quatrième classe, dont voici l'équation :

$$(abcu)^2(a'b'c'u)^2 - 9(aba'u)^2(aa'b'u)^2 = 0.$$

11. Appliquons les résultats du numéro précédent à deux cercles se coupant en A et B. Pour qu'ils forment un système quadrillé, il faut que leurs tangentes en A (ou B) soient séparées harmoniquement par les points cycliques ou soient rectangulaires.

Ainsi, *deux cercles* C_1 *et* C_2 *se coupant à angle droit ont des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux aux points cycliques.*

Pour former un tel quadrangle, il faut prendre un point P de C_1, le joindre aux points cycliques ; on obtient deux droites imaginaires (isotropes) coupant le cercle C_2 en deux points imaginaires I et I' situés sur l'axe radical du cercle C_2 et du cercle nul P. Les points I' et I, joints à leur tour aux points cycliques, donnent deux autres droites imaginaires se coupant en un point réel Q de C_1. Les cercles nuls P et Q ont, avec C_2, même axe radical et sont alignés sur le centre de ce cercle. L'étude actuelle conduit donc à cette propriété connue : *Tout cercle* C_1 *passant par les points limites* P *et* Q *d'un faisceau de cercles coupe orthogonalement tous les cercles de ce faisceau.*

En interprétant la transformation de Hirst trouvée ci-dessus, on a ce théorème de géométrie élémentaire :

Soient deux cercles se coupant à angle droit, P *et* Q *deux points de l'une des circonférences alignés sur le centre de l'autre,* P' *le symétrique de* P *par rapport à la ligne des centres;* P' *et* Q *se correspondent dans une transformation par vecteurs réciproques ayant pour pôle le milieu de la corde commune.*

Les deux cercles C_1 et C_2 ont aussi des quadrangles inscrits à deux points diagonaux en A et B, ce qui conduit à cette autre propriété :

Dans deux cercles se coupant à angle droit, on peut inscrire

une infinité de quadrangles ayant deux points diagonaux aux points communs A *et* B *des cercles; les sommets opposés de chaque quadrangle sont aux extrémités d'un diamètre d'un cercle, le troisième point diagonal des quadrangles décrit la circonférence passant par* A *et* B *et par les centres des cercles donnés.*

Intersection de courbes quadrillées.

12. Soit une quartique binodale quadrillée φ représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) \\ \varphi_1(x_1, x_3) & \varphi_2(x_1, x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Adjoignons à ce déterminant une ligne de constantes α_1 et α_2; nous obtenons la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ f_1 & f_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{Vmatrix}$$

qui s'annule pour un groupe Q de quatre points; ces points sont les intersections de deux couples correspondants de rayons $\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1 = 0$ et $\alpha_1 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1 = 0$ des deux involutions projectives; ce sont donc les sommets d'un quadrangle inscrit à φ.

Si, au contraire, nous ajoutons au déterminant une colonne de constantes β_1, β_2, la matrice

$$\begin{Vmatrix} f_1 & f_2 & \beta_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \beta_2 \end{Vmatrix}$$

s'annule pour quatre points R. En faisant varier β_1, β_2, on a une infinité simple de groupes R.

Un groupe Q et un groupe R sont toujours sur une même conique représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ f_1 & f_2 & \beta_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Toute conique passant par un groupe Q ou un groupe R est représentable par cette dernière équation, car si β_1 et β_2 sont donnés, la conique doit appartenir à un faisceau et dépendre de deux paramètres homogènes. Par suite, chaque groupe R est déterminé par un de ses points.

Les quadrangles inscrits dans la quartique binodale quadrillée forment une série linéaire simplement infinie de groupes de points corésiduels.

Nous devons cet énoncé à une communication verbale de M. C. Servais qui en soupçonnait l'exactitude et qui en devinait l'application à de nombreuses questions particulières relatives à la courbe φ, notamment à la construction de la tangente.

Si dans la matrice représentant le groupe R, β_1 et β_2 sont, non plus des constantes, mais des formes linéaires respectivement en x_1, x_2 et x_1, x_3, la matrice représente ∞^3 quaternes de points S découpés sur la courbe φ par des cubiques passant par les nœuds.

Les groupes R sont un cas particulier des groupes S et correspondent au cas où ces cubiques dégénèrent en une conique et une droite passant par les nœuds.

13. Considérons deux quartiques planes binodales quadrillées situées dans le même plan et dont les nœuds coïncident. Cherchons les conditions nécessaires pour que ces deux courbes aient un quadrangle inscrit commun.

Nous pouvons supposer les points doubles à l'infini sur deux axes cartésiens x et y; au lieu de quadrangle inscrit, nous dirons parallélogramme inscrit, en sous-entendant que les côtés de ce parallélogramme sont parallèles aux axes. Des seize intersections des deux courbes, huit sont concentrées aux nœuds et huit sont en général à distance finie.

Les équations des deux quartiques peuvent s'écrire

$$\varphi \equiv y^2(a_1x^2+2b_1x+c_1)+2y(a_2x^2+2b_2x+c_2)+(a_3x^2+2b_3x+c_3)=0,$$
$$\varphi' \equiv y^2(a'_1x^2+2b'_1x+c'_1)+2y(a'_2x^2+2b'_2x+c'_2)+(a'_3x^2+2b'_3x+c'_3)=0.$$

Pour qu'elles aient en commun les sommets d'un parallélo-

gramme, il faut d'abord que deux valeurs, généralement distinctes, de x donnent les mêmes valeurs à y, c'est-à-dire que les relations

$$\frac{a_1x^2+2b_1x+c_1}{a'_1x^2+2b'_1x+c'_1}=\frac{a_2x^2+2b_2x+c_2}{a'_2x^2+2b'_2x+c'_2}=\frac{a_3x^2+2b_3x+c_3}{a'_3x^2+2b'_3x+c'_3}$$

soient compatibles pour deux valeurs de x. Généralement, elles ne sont pas compatibles du tout; en effet, multiplions les termes du premier rapport par A_1, ceux du second par A_2, du troisième par A_3 (A_i, B_i, C_i étant les mineurs du déterminant $\Delta=|abc|$); chacun des rapports ci-dessus devient égal à

$$\frac{x^2\Delta}{(a'_1A_1+a'_2A_2+a'_3A_3)x^2+2(b'_1A_1+b'_2A_2+b'_3A_3)x+(c'_1A_1+c'_2A_2+c'_3A_3)}.$$

Le numérateur est identiquement nul, puisque la première courbe est quadrillée; donc le dénominateur doit l'être. Si l'on avait multiplié les termes des trois rapports par A'_1, A'_2, A'_3 et additionné, on aurait eu de même

$$\frac{(a_1A'_1+a_2A'_2+a_3A'_3)x^2+2(b_1A'_1+b_2A'_2+b_3A'_3)x+(c_1A'_1+c_2A'_2+c_3A'_3)}{x^2\Delta'},$$

et, comme $\Delta'=0$, le numérateur s'annule aussi. Ainsi, deux équations du second degré en x doivent être compatibles, et même pour deux valeurs de x, c'est-à-dire que ces équations doivent être équivalentes et que l'on doit avoir

$$(I)\quad \frac{a'_1A_1+a'_2A_2+a'_3A_3}{a_1A'_1+a_2A'_2+a_3A'_3}=\frac{b'_1A_1+b'_2A_2+b'_3A_3}{b_1A'_1+b_2A'_2+b_3A'_3}=\frac{c'_1A_1+c'_2A_2+c'_3A_3}{c_1A'_1+c_2A'_2+c_3A'_3}.$$

Cela suffit-il? Quand ces conditions sont satisfaites, il y a deux valeurs de x, donc deux parallèles à l'axe des y qui coupent les deux courbes aux mêmes points. Mais, pour que ces points soient les sommets d'un parallélogramme inscrit, il faut encore que ces deux valeurs de x forment un couple de l'involution déterminée par les côtés opposés des parallélogrammes

inscrits dans une des courbes, la première par exemple. Cette involution est représentée, comme nous le savons, par l'égalité

$$2A_i - B_i(x_1 + x_2) + 2C_i x_1 x_2 = 0.$$

Les racines de la deuxième équation du second degré, dont nous avons parlé en dernier lieu, sont telles que l'on a

$$1 : -(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = (a_1 A'_1 + a_2 A'_2 + a_3 A'_3) : 2(b_1 A'_1 + b_2 A'_2 + b_3 A'_3) : (c_1 A'_1 + c_2 A'_2 + c_3 A'_3),$$

et ces deux valeurs de x appartiennent à l'involution, car l'identité suivante

$$A_i(a_1 A'_1 + a_2 A'_2 + a_3 A'_3) + B_i(b_1 A'_1 + b_2 A'_2 + b_3 A'_3) + C_i(c_1 A'_1 + c_2 A'_2 + c_3 A'_3) \equiv 0$$

est exacte, puisque les expressions qui multiplient A'_1, A'_2, A'_3 sont nulles à cause de l'hypothèse $\Delta = 0$.

Par suite, les conditions (I) sont suffisantes, pourvu que l'on y joigne naturellement $\Delta = \Delta' = 0$.

14. Nous ouvrons ici une parenthèse. Les raisonnements du numéro précédent peuvent être conduits en intervertissant les rôles des variables x et y. Ils donnent alors ce théorème d'algèbre :

Si deux déterminants à neuf éléments $(a_1 b_2 c_3)$ *et* $(a'_1 b'_2 c'_3)$ *sont nuls et si l'on a*

$$(1)\qquad \frac{a'_1 A_1 + a'_2 A_2 + a'_3 A_3}{a_1 A'_1 + a_2 A'_2 + a_3 A'_3} = \frac{b'_1 A_1 + b'_2 A_2 + b'_3 A_3}{b_1 A'_1 + b_2 A'_2 + b_3 A'_3} = \frac{c'_1 A_1 + c'_2 A_2 + c'_3 A_3}{c_1 A'_1 + c_2 A'_2 + c_3 A'_3},$$

on a aussi

$$(2)\qquad \frac{a'_1 A_1 + b'_1 B_1 + c'_1 C_1}{a_1 A'_1 + b_1 B'_1 + c_1 C'_1} = \frac{a'_2 A_1 + b'_2 B_1 + c'_2 C_1}{a_2 A'_1 + b_2 B'_1 + c_2 C'_1} = \frac{a'_3 A_1 + b'_3 B_1 + c'_3 C_1}{a_3 A'_1 + b_3 B'_1 + c_3 C'_1}.$$

Il convient de démontrer directement cette propriété. D'abord, les hypothèses, savoir les relations (1) et les égalités $(a_1 b_2 c_3) = (a'_1 b'_2 c'_3) = 0$, ne sont pas indépendantes : trois

d'entre elles entraînent évidemment la quatrième et, comme les mineurs relatifs à deux lignes d'un déterminant nul sont proportionnels, les égalités (1) sont vraies aussi quand on y remplace les A par des B ou des C. Pareillement, les égalités à démontrer (2) sont équivalentes à celles que l'on obtient en y substituant A_2, B_2, C_2 ou A_3, B_3, C_3 à A_1, B_1, C_1, etc.

Multiplions les rapports (1) respectivement par A_1, B_1, C_1 et additionnons : le dénominateur s'annule identiquement et l'on a donc

$$(3)\qquad \begin{aligned} &A_1(a'_1A_1 + b'_1B_1 + c'_1C_1) + A_2(a'_2A_1 + b'_2B_1 + c'_2C_1) \\ &\quad + A_3(a'_3A_1 + b'_3B_1 + c'_3C_1) = 0; \end{aligned}$$

mais, à cause de l'hypothèse $(a'b'c') = 0$, on a visiblement

$$(4)\qquad \begin{aligned} &A'_1(a'_1A_1 + b'_1B_1 + c'_1C_1) + A'_2(a'_2A_1 + b'_2B_1 + c'_2C_1) \\ &\quad + A'_3(a'_3A_1 + b'_3B_1 + c'_3C_1) = 0. \end{aligned}$$

Intervertissons les rôles entre les lettres accentuées et les autres; nous obtenons de même

$$(5)\qquad \begin{aligned} &A'_1(a_1A'_1 + b_1B'_1 + c_1C'_1) + A'_2(a_2A'_1 + b_2B'_1 + c_2C'_1) \\ &\quad + A'_3(a_3A'_1 + b_3B'_1 + c_3C'_1) = 0, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} &A_1(a_1A'_1 + b_1B'_1 + c_1C'_1) + A_2(a_2A'_1 + b_2B'_1 + c_2C'_1) \\ &\quad + A_3(a_3A'_1 + b_3B'_1 + c_3C'_1) = 0. \end{aligned}$$

Les égalités (3), (4), (5), (6) montrent que les deux équations homogènes en X, Y, Z,

$$\begin{cases} X(a'_1A_1 + b'_1B_1 + c'_1C_1) + Y(a'_2A_1 + b'_2B_1 + c'_2C_1) + Z(a'_3A_1 + b'_3B_1 + c'_3C_1) = 0, \\ X(a_1A'_1 + b_1B'_1 + c_1C'_1) + Y(a_2A'_1 + b_2B'_1 + c_2C'_1) + Z(a_3A'_1 + b_3B'_1 + c_3C'_1) = 0, \end{cases}$$

admettent deux systèmes de racines non nulles et généralement non proportionnelles, savoir A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3; donc ces équations sont identiques et leurs coefficients sont proportionnels, ce qu'il fallait établir.

Remarquons en passant que, si les quantités a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i sont des formes linéaires quaternaires, $(a_1b_2c_3) = 0$ et $(a'_1b'_2c'_3) = 0$ sont les équations de deux surfaces cubiques les plus générales.

Les relations (1) représentent une courbe du vingt-septième ordre, coupant en cinquante-quatre points l'intersection des deux surfaces cubiques et présentant une certaine relation avec des cubiques gauches situées sur les deux surfaces et formant sur chacune d'elles un réseau. Le théorème actuel montre qu'elle a la même relation avec les cubiques gauches des réseaux conjugués. Mais nous ne pouvons insister sur ces faits sans sortir de notre sujet.

15. Revenons à nos deux quartiques binodales quadrillées ayant les mêmes points doubles et supposons qu'elles possèdent un parallélogramme inscrit commun; soient

$$a_x^2 = 0, \quad b_y^2 = 0$$

les équations des couples de côtés opposés de ce parallélogramme. Les équations de ces deux courbes peuvent s'écrire respectivement

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & a_x'^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{Vmatrix}$$

s'annule pour quatre points U communs à ces deux courbes et autres que les sommets du parallélogramme commun. Et ces nouveaux points sont communs à toutes les courbes du réseau ponctuel dont l'équation s'écrit

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \lambda & a_x^2 & b_y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deux des courbes de ce réseau, par exemple

$$\begin{vmatrix} \lambda & a_x^2 & b_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \mu & a_x^2 & b_y^2 \end{vmatrix} = 0,$$

se coupent encore aux quatre points annulant la matrice

$$\begin{Vmatrix} \lambda & \mu & a_x^2 & b_y^2 \end{Vmatrix} = 0;$$

or, ces derniers points sont les intersections des couples de droites

$$| \lambda \quad \mu \quad a_x^2 | = 0 \quad \text{et} \quad | \lambda \quad \mu \quad b_y^2 | = 0$$

et sont donc les sommets d'un parallélogramme inscrit.

Si deux courbes quadrillées ayant un quadrangle commun se coupent encore en quatre points U, *il existe une double infinité de quartiques binodales ayant les mêmes nœuds que les proposées, passant toutes par les points* U *et telles que deux quelconques d'entre elles ont encore un quadrangle inscrit commun.*

A-t-on ainsi toutes les quartiques binodales qui, passant par les quatre points U, coupent encore l'une ou l'autre des deux proposées aux sommets d'un parallélogramme?

Oui, car un parallélogramme quelconque inscrit dans la courbe

$$\gamma_4 \equiv | \quad a_x^2 \quad b_y^2 \quad | = 0$$

est défini par les relations

$$a_x^2 + k a_x'^2 = 0, \quad b_y^2 + k b_y'^2 = 0;$$

or, la courbe

$$\gamma_4' \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 + k a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 + k b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0$$

passe visiblement par les sommets de ce parallélogramme et par les points U; ces huit points formant, avec les nœuds, l'intersection totale de γ_4 et γ_4', toute quartique binodale passant par ces huit points a une équation de la forme

$$l\gamma_4 + \gamma_4' \equiv \begin{vmatrix} k & -1 & l \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, *lorsque trois quartiques ont deux nœuds coïncidants et encore quatre points communs, si l'une de ces courbes coupe encore chacune des deux autres aux sommets d'un parallélogramme, il en est de même des deux dernières courbes et de deux courbes quelconques du réseau déterminé par les trois proposées.*

Quatre points arbitraires du plan, dont trois ne sont pas sur une même parallèle à l'un des axes, peuvent être pris pour un groupe U de points appartenant à un réseau de quartiques se coupant deux à deux suivant un parallélogramme. En effet, par suite du principe de l'addition des colonnes, on peut transformer la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{matrix} \right\|$$

de telle façon que la première ligne soit formée de trois formes quadratiques binaires arbitrairement choisies; les éléments de la seconde ligne contiennent alors neuf coefficients homogènes inconnus; le fait que la matrice s'annule pour quatre points donnés fournit huit relations linéaires et homogènes par rapport à ces neuf coefficients et permet de les déterminer.

Les résultats que nous venons de trouver seront utilisés dans le dernier paragraphe du présent travail.

Remarquons encore qu'il est bien facile d'écrire les équations de deux quartiques binodales à points doubles confondus et se coupant encore suivant deux quadrangles inscrits; ce sont :

$$\left| \begin{matrix} a_x^2 & a_x'^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 \end{matrix} \right| = 0, \qquad \left| \begin{matrix} a_x^2 & \lambda a_x'^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 \end{matrix} \right| = 0.$$

Biquadratique gauche de première espèce.

16. Cherchons les propriétés de la biquadratique gauche de première espèce correspondant à celles qui ont été exposées ci-dessus pour la quartique plane. Parmi les résultats que nous allons trouver, les plus importants sont connus, mais ont été découverts par d'autres méthodes.

Soit c_4 une biquadratique gauche, intersection de deux quadriques, dans le cas le plus général. Cette courbe est projetée, d'un point extérieur A, suivant un cône du quatrième ordre à deux génératrices doubles; la trace de ce cône sur un plan quelconque est une quartique binodale qui, moyennant une seule condition, est quadrillée; dans ce cas, le cône perspectif

à c_4 sera dit aussi *quadrillé*. Donc, *il existe une double infinité de cônes quadrillés perspectifs à la biquadratique.*

Considérons un de ces cônes et soit A son sommet. Il existe sur c_4 une infinité simple de quadrangles tels que deux côtés opposés rencontrent une bisécante AO issue de A, tandis que les autres côtés rencontrent la seconde bisécante AO′ issue de A; mais AO et AO′ sont deux génératrices de la quadrique F passant par A et par c_4; donc les couples de côtés opposés de ces quadrangles sont aussi des génératrices, de l'un et de l'autre système, de F. Alors, la propriété qui appartient à A comme centre de projection de c_4 est commune à tous les points de la quadrique F. *Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche de première espèce se compose d'un nombre fini de quadriques passant par la courbe.* Nous dirons aussi que chacune de ces quadriques est *quadrillée.*

Les développements exposés pour la quartique plane binodale donnent immédiatement les propriétés suivantes :

Les droites issues d'un point quelconque d'une quadrique quadrillée F *et s'appuyant sur les couples de diagonales des quadrangles inscrits correspondants engendrent un cône de second ordre.*

Les diagonales de ces quadrangles sont projetées d'un point quelconque de F *suivant les plans tangents à un cône de quatrième classe à deux plans tangents doubles.*

Donc aussi, *les diagonales de ces quadrangles engendrent une surface réglée de quatrième classe et de quatrième ordre dont la développable bitangente est de seconde classe.*

17. Passons à l'expression analytique de ces faits. Soit

$$F \equiv x_1x_4 - x_2x_3 = 0$$

une quadrique quadrillée circonscrite à c_4; les arêtes x_1x_2 et x_3x_4 sont génératrices d'un même système et x_1x_3, x_2x_4 de l'autre système. Supposons que les sommets (134) et (124) du tétraèdre de référence soient sur c_4 et appelons A le som-

met (125). Une autre quadrique passant par c_4 a une équation privée des termes en x_2^2 et x_3^2, soit

$$F_1 \equiv a_1x_4^2 + 2x_4[b_1x_3 + a_2x_2 + 2(b_2 + \lambda)x_1] - 4\lambda x_2x_3 + x_1(2c_2x_3 + 2b_3x_2 + c_3x_1) = 0.$$

Projetons c_4 de A sur le plan x_4 en appliquant les formules connues de la représentation plane d'une quadrique,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z_1^2 : z_1z_2 : z_1z_3 : z_2z_3,$$

nous obtenons

$$z_3^2(a_1z_2^2 + 2b_1z_2z_1) + 2z_3z_4(a_2z_2^2 + 2b_2z_2z_1 + c_2z_1^2) + z_4^2(2b_3z_2z_1 + c_3z_1^2) = 0.$$

Puisque cette courbe est quadrillée, nous avons

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 = 0.$$

Appelons alors t et z deux sommets opposés d'un quadrangle projetés sur le plan x_4. Ils se correspondent dans une inversion dont les équations s'obtiennent en résolvant par rapport à t_1, t_2, t_3 les équations des deux involutions projectives étudiées au n° 4; on trouve

$$t_1 : t_2 : t_3 = (2C_3z_3 - C_2z_4)(2C_3z_2 - B_3z_4) : (2C_3z_3 - C_2z_4)(B_3z_2 - 2A_3z_4) : (C_2z_3 - 2C_4z_4)(2C_3z_2 - B_3z_4)$$

ou, en abrégé

$$t_1 : t_2 : t_3 = mn : pn : qm.$$

Par suite, en appelant y le point de la courbe gauche projeté en t,

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = t_1^2 : t_1t_2 : t_1t_3 : t_1t_4 = m^2n^2 : mn^2p : m^2nq : mnpq,$$

ou, en simplifiant par mn,

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = mn : np : mq : pq.$$

Or mn, np, mq, pq sont des fonctions linéaires de z_1^2, z_1z_2, z_1z_3, z_2z_3, donc de x_1, x_2, x_3, x_4, en appelant x le point de la courbe gauche projeté en z.

Donc, *les sommets opposés d'une série de quadrangles inscrits appartenant à une même quadrique quadrillée se correspondent dans une collinéation.*

Dans le cas particulier où le mineur C_3 du déterminant Δ relatif à la quartique plane, projection de c_4, est nul, l'un des points doubles de cette courbe plane est un point double d'inflexion; alors le centre A est dans le plan osculateur à la courbe c_4 en un des points (124) ou (134), et la tangente à c_4 en un de ces points est génératrice de la surface F. Or il y a, sur c_4, deux quadruples de points où la tangente est génératrice de F; en un de ces points, M, on peut considérer la génératrice de F qui n'est pas tangente mais corde MN. Lorsque le centre A est sur cette droite, la projection plane de c_4 est une courbe binodale quadrillée ayant en un de ses nœuds une inflexion. D'après une remarque faite à la fin du n° 7, ce nœud est alors double d'inflexion; donc la tangente en N est génératrice de F et le plan osculateur en N passe par M.

Ainsi, *toute quadrique quadrillée possède quatre génératrices, cordes de* c_4, *qui sont chacune l'intersection des plans osculateurs en leurs deux points d'appui.*

Réciproquement, toute corde jouissant de cette propriété est génératrice d'une quadrique quadrillée.

Quand A est sur une de ces cordes, les rayons issus de A et s'appuyant sur les couples de diagonales des quadrangles inscrits sont dans un même plan, et les plans qui projettent de A ces mêmes diagonales enveloppent un cône qui n'est plus de quatrième, mais de troisième classe.

D'où encore ce corollaire évident : *la surface du quatrième ordre, lieu des diagonales d'une série de quadrangles inscrits coupe la quadrique quadrillée correspondante suivant la courbe* c_4 *et quatre de ses cordes.*

18. Étant donnée une biquadratique c_4, combien a-t-elle de

quadriques circonscrites quadrillées? Cette question est connue et se résout aisément de plus d'une manière. Si l'on projette c_4 d'un de ses points, A, sur un plan quelconque, cette projection est une cubique non singulière; les traces O et O′ des génératrices AO et AO′ d'une quadrique quadrillée F sont, en vertu d'un paragraphe précédent, des points correspondants de la cubique; le plan AOO′ est tangent à F et contient la tangente AT à c_4; donc O et O′ sont alignés sur la trace T de AT. Réciproquement, si O et O′ sont deux points correspondants de la cubique, alignés sur T, la quadrique circonscrite F définie par AO a pour plan tangent OAT, pour seconde génératrice AO′ et les quadrangles inscrits dans la cubique sont les projections de quadrangles inscrits à c_4 et appartenant à la quadrique F; celle-ci est donc quadrillée.

Le problème est ainsi ramené à trouver deux points correspondants d'une cubique alignés sur un point donné T de la courbe. Dans la représentation d'une cubique non singulière par les fonctions elliptiques, les arguments de trois points en ligne droite ont pour somme un nombre entier de périodes; deux points correspondants, ayant même tangentiel, ont des arguments qui diffèrent d'une demi-période et, comme il y a trois demi-périodes, il y a trois genres de points correspondants; ensuite, si u est l'argument de T et v celui de O, celui de O′ sera $v + \frac{1}{2}$ période et $u + 2v$ vaut une demi-période, ou $\frac{u}{2} + v$ vaut un quart de période. Or il y a douze quarts de période, donc douze valeurs de v, donnant six couples de points O et O′. Le problème a six solutions.

On sait que la géométrie conduit au même résultat : les points inconnus O, O′ et le point donné T étant en ligne droite, il en est de même de leurs tangentiels P, P′, U; mais O et O′ étant correspondants, P′ coïncide avec P, et U est le tangentiel de P. Or, de U on peut mener à la courbe quatre tangentes ayant leur contact ailleurs qu'en U; l'une est UT; soient P_1, P_2, P_3 les contacts des trois autres; chacun de ceux-ci est le tangentiel d'un quadruple ayant T pour un de ses points diagonaux, et fournit donc deux solutions du problème.

On voit par là qu'il y a six droites issues de T et rencontrant la cubique plane en des points correspondants; la méthode géométrique donne un arrangement de ces droites en trois couples répondant aux trois genres de points correspondants. Cet arrangement, dont on verra l'utilité, se serait révélé aussi par l'examen attentif des quarts de période.

Rapportons la cubique plane au triangle ayant pour sommets les points O et O′ et leur tangentiel commun P. Les termes en x_1^3, x_2^3, x_3^3 manquent dans l'équation. Puisque la tangente en $O(x_1 = x_3 = 0)$ est le côté $PO(x_3 = 0)$, le terme en $x_2^2x_1$ fait défaut, et de même le terme en $x_3^2x_1$; l'équation de la cubique plane a la forme

$$ax_1^2x_2 + bx_1^2x_3 + 2cx_1x_2x_3 + dx_2^2x_3 + ex_2x_3^2 = 0.$$

La première polaire du point $P(x_2 = x_3 = 0)$ est

$$ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3 = 0.$$

En soustrayant, de l'équation de la courbe, ce dernier polynôme multiplié par x_1, on obtient

$$cx_1x_2x_3 + dx_2^2x_3 + ex_2x_3^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2x_3(cx_1 + dx_2 + ex_3) = 0.$$

Les trois droites représentées par cette égalité passent par les contacts O, O′, O_1, O_2 des tangentes issues de P; la troisième est donc la droite O_1O_2; elle rencontre OO′ au point donné T. Une droite quelconque par T,

$$cx_1 + dx_2 + ex_3 = kx_1 \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{dx_2 + ex_3}{k - c},$$

rencontre la courbe en des points définis par l'équation

$$(ax_2 + bx_3)(dx_2 + ex_3)^2 + 2(k - c)cx_2x_3(dx_2 + ex_3) + (k - c)^2x_2x_3(dx_2 + ex_3) = 0,$$

ou, en divisant par $(dx_2 + ex_3)$ et simplifiant,

$$adx_2^2 + x_2x_3(ae + bd - c^2 + k^2) + bex_3^2 = 0.$$

Pour que la droite issue de T soit tangente en un autre point de la courbe, il faut que la dernière équation en $x_2 : x_3$ ait deux racines égales, ou que l'on ait

$$(ae + bd - c^2 + k^2)^2 = 4abde.$$

Cette égalité ne contient que les puissances paires de k; ses racines sont, deux à deux, égales et de signes contraires. Les tangentes issues de T sont donc, deux à deux, séparées harmoniquement par les droites TOO′ et TO_1O_2. Ces quatre tangentes peuvent être groupées deux à deux de trois manières, et chaque fois les deux couples définissent une involution; les rayons doubles de ces trois involutions sont les six droites issues de T et rencontrant encore la cubique en des points correspondants. En d'autres termes, si les tangentes issues de T sont représentées par une forme biquadratique binaire, les six droites telles que TOO′ sont représentées par le covariant sextique de la forme.

Transportons ce résultat sur la biquadratique gauche c_4. Le plan mené par la tangente AT à c_4 et par le sommet C_i d'un des quatre cônes du second ordre perspectifs à la courbe, touche encore celle-ci au point où elle recoupe le rayon C_iA. La trace de ce plan est donc tangente à la cubique plane en un point autre que T. D'après ce qui précède, les plans AOO′ et AO_1O_2, tangents à deux des six quadriques quadrillées, séparent harmoniquement les plans tangents en A à deux couples de cônes (C_i). Dans le faisceau de quadriques ayant pour base c_4 il y a quatre cônes; ceux-ci peuvent, de trois manières, être répartis en deux couples qui sont donc séparés harmoniquement par deux des six quadriques quadrillées circonscrites à c_4. On remarquera l'analogie de cette propriété avec un théorème démontré plus haut pour deux coniques formant un système quadrillé.

On peut donc formuler l'énoncé suivant :

Par toute biquadratique gauche de première espèce, il passe six quadriques quadrillées. Dans le faisceau $F + kF'$ *ayant pour base la courbe* c_4, *il y a quatre cônes définis par une forme*

biquadratique en k; *les six quadriques quadrillées annulent le covariant sextique de cette forme.*

Les quadriques quadrillées sont connues et portent habituellement le nom de *quadriques de Voss.* La dernière propriété énoncée est connue aussi, mais elle n'a, croyons-nous, été démontrée que par l'emploi des fonctions elliptiques.

Il serait possible d'écrire le covariant simultané de deux quadriques qui représente les six quadriques de Voss du même faisceau. Soit, en effet,

$$a_x^2 + ka_x'^2 = 0$$

ce faisceau. Les valeurs de k qui donnent des cônes sont les racines de l'équation

$$(abcd)^2 + 4k(abca')^2 + 6k^2(aba'b')^2 + 4k^3(aa'b'c')^2 + k^4(a'b'c'd')^2 = 0.$$

Il suffirait d'écrire le covariant sextique de cette forme et d'y remplacer k par $-(a_x^2 : a_x'^2)$.

Voici encore une conséquence de l'étude actuelle : les côtés opposés d'une des six séries de quadrangles inscrits dans c_4 déterminent une involution sur une directrice quelconque du système réglé qu'ils engendrent. Chacune de ces douze involutions ayant deux éléments doubles, on retrouve ce théorème connu : *Il arrive vingt-quatre fois que deux tangentes à la biquadratique et leur corde de contact sont génératrices d'une même quadrique circonscrite.*

D'ailleurs, au numéro précédent, on avait trouvé les quadruples de points de c_4 appartenant à une quadrique quadrillée et l'on avait reconnu que ces quadruples s'arrangent en couples tels que le plan osculateur en chaque point d'un couple passe par l'autre point du couple. Comme il y a six quadriques quadrillées, on en tire cette conséquence, identique au fond au théorème précédent : *Sur toute biquadratique gauche de première espèce, il y a vingt-quatre couples de points tels que le plan osculateur en chacun des points d'un couple passe par l'autre point du couple.*

Biquadratique gauche rationnelle.

19. On sait que tout cône perspectif à cette courbe est du quatrième ordre et possède trois génératrices doubles.

Soit AB une bisécante de la courbe γ_4 et, s'il est possible, sur cette bisécante un point P qui soit le sommet d'un cône quadrillé, de manière que deux côtés opposés de chaque quadrangle inscrit rencontrent PAB, les deux autres s'appuyant sur une autre bisécante PCD. Les propriétés des quartiques planes trinodales quadrillées donnent, par projection, la condition pour que le point P réponde à la question : Les plans tangents au cône (P) issus de PAB doivent toucher ce cône suivant deux génératrices situées dans un plan contenant PCD. Ou encore : Si M et N sont les contacts des tangentes à γ_4 qui rencontrent PAB, il faut et il suffit que MN rencontre CD. Mais les bisécantes qui rencontrent MN engendrent une surface de troisième ordre contenant la courbe γ_4 et coupant PAB en un seul point P.

Soit ensuite Q un point de AB tel que le cône de sommet Q perspectif à la quadrique soit quadrillé, mais de façon que les couples de côtés opposés des quadrangles inscrits rencontrent les deux autres bisécantes QEF, QGH issues de Q. D'après un théorème établi pour les quartiques planes, les plans tangents au cône (Q) le long de la génératrice double AB doivent séparer harmoniquement les plans (AB, EF) et (AB, GH). Or, ces plans tangents sont déterminés par AB et par les tangentes à γ_4 respectivement en A et B; les couples de plans séparés harmoniquement par ces deux plans tangents sont en involution quadratique. D'autre part, les plans déterminés par AB et par les seconde et troisième bisécantes issues d'un point variable de AB sont aussi des couples d'une involution quadratique ayant pour éléments doubles les plans qui contiennent les trisécantes issues de A et de B. Deux involutions ont un seul couple commun; il y a donc sur AB un seul point Q répondant à la question. Toutefois, si la tangente en A à γ_4 rencontre encore

la courbe, les deux involutions ont un élément double commun et n'en ont point d'autre; alors Q coïncide avec A. Et si les tangentes en A et B à γ_4 rencontrent encore la courbe, les deux involutions ont les mêmes éléments doubles et coïncident; alors tous les points de AB sont des points Q.

En résumé, *sur une bisécante quelconque, il y a, en général, deux points* P *et* Q, *sommets de cônes quadrillés circonscrits.*

Le lieu des sommets des cônes quadrillés est donc une certaine surface S qui peut contenir la quartique comme courbe multiple d'ordre x. Une bisécante coupe S en deux points simples et deux points x^{uples}; par suite, le degré de la surface est $2x + 2$. Une trisécante à trois appuis distincts ne peut pas rencontrer S en dehors de γ_4, d'où il résulte que le degré de la surface est aussi $3x$. Finalement x est égal à 2 et la surface S est de sixième ordre.

La courbe γ_4 possède, comme on sait, quatre tangentes qui la rencontrent encore; les six droites joignant deux à deux les contacts de ces tangentes sont tout entières sur S. Si A est un de ces contacts, une bisécante quelconque par A ne perce plus la surface qu'en un seul point P, car on on a vu que le point Q coïncide avec A. Donc ces quatre contacts sont des points triples de S. Les tangentes en ces points rencontrent la surface en un point double, un point triple et encore un point double infiniment voisin du point triple, ce qui équivaut à sept intersections; ces tangentes sont donc tout entières sur S.

Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche rationnelle est une surface du sixième ordre ayant la biquadratique comme courbe double, possédant quatre points triples aux contacts des tangentes qui rencontrent encore la courbe, et passant par ces tangentes et par les six droites qui joignent, deux à deux, les contacts de ces tangentes.

20. On sait que la biquadratique rationnelle possède trois cordes, les *cordes principales de Bertini*, qui sont chacune l'intersection des plans osculateurs à la courbe en leurs extrémités; ces cordes se coupent en un même point R.

Pour obtenir l'équation de la surface sextique S définie au numéro précédent, nous ferons usage de la représentation paramétrique de la biquadratique,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2(\omega^2 - a^2) : \omega^2 - 1 : \omega.$$

Dans cette représentation, due à M. Bertini (*), les plans $x_1 = 0$ et $x_4 = 0$ sont respectivement les plans osculateurs aux appuis M et N ($\omega = 0$ et $\omega = \infty$) d'une corde principale; les plans x_2 et x_3 sont respectivement les plans tangents en M et N et contenant les trisécantes issues de M et N.

Si ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont les paramètres des quatre intersections de la courbe avec un même plan, on a

$$\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 + \Sigma\omega_1\omega_2 + a^2 = 0.$$

Cette égalité représente donc l'involution des points coplanaires (**); en posant

$$p = \omega_1\omega_2, \quad p' = \omega_3\omega_4, \quad s = \omega_1 + \omega_2, \quad s' = \omega_3 + \omega_4,$$

cette égalité devient

$$pp' + p + p' + ss' + a^2 = 0.$$

Si $\alpha_x = 0$ est l'équation du plan passant par les quatre points ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, on a

$$\alpha_2\omega^4 + \alpha_1\omega^3 + (\alpha_3 - a^2\alpha_2)\omega^2 + \alpha_4\omega - \alpha_3 = 0,$$

d'où

$$pp' = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \qquad ps' + p's = -\frac{\alpha_4}{\alpha_2},$$

$$p + p' + ss' = \frac{\alpha_3 - a^2\alpha_2}{\alpha_2}, \quad s + s' = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

et, en tenant compte de l'involution coplanaire,

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = (s + s') : -1 : pp' : (ps' + p's),$$

(*) Bertini, *Rend. Ist. Lomb.*, 1872, pp. 622-658.

(**) Voir Bertini, *loc. cit.*

de sorte que l'équation du plan devient

$$(s + s')x_1 - x_2 + pp'x_3 + (ps' + p's)x_4 = 0.$$

Connaissant un point x quelconque dans l'espace et deux points de la courbe définis par les fonctions symétriques s et p de leurs paramètres ω_1, ω_2, on trouve les deux autres points ω_3, ω_4 où le plan des trois premiers coupe la biquadratique, en résolvant, par rapport à s' et p', l'égalité précédente avec l'involution coplanaire. Cependant, ce système est indéterminé quand on a

$$\begin{Vmatrix} x_2 + px_4 & px_3 + sx_4 & sx_1 - x_2 \\ s & p + 1 & p + a^2 \end{Vmatrix} = 0.$$

Telles sont donc les conditions pour qu'un point x soit sur une bisécante $\omega_1\omega_2$ (s, p). Ou bien, les x étant variables, ce sont les équations de cette bisécante; ou encore, s et p étant les inconnues, ces relations donnent les trois bisécantes issues de x.

Pour avoir les trois valeurs de p répondant aux trois bisécantes, il faut éliminer s de la matrice : les deux dernières colonnes donnent

$$s = \frac{px_3(p + a^2) + x_2(p + 1)}{x_1(p + 1) - x_4(p + a^2)}.$$

En mulipliant la seconde colonne par x_1, la troisième par x_4, en soustrayant et combinant avec la première colonne, on a

$$\frac{x_2 + px_4}{s} = \frac{px_1x_3 + x_2x_4}{x_1(p + 1) - x_4(p + a^2)},$$

d'où

$$s = \frac{(x_2 + px_4)[x_1(p + 1) - x_4(p + a^2)]}{px_1x_3 + x_2x_4}.$$

Égalons les deux valeurs de s,

$$\text{(P)} \qquad (px_1x_3 + x_2x_4)[px_3(p + a^2) + x_2(p + 1)] = (x_2 + px_4)[x_1(p + 1) - x_4(p + a^2)]^2.$$

Cette équation en p est du troisième ordre; ses coefficients sont cubiques en x et s'annulent tous pour $x_1 = x_4 = 0$.

Pour trouver l'équation de la surface S, lieu des sommets des cônes quadrillés, rappelons que, si x est un tel sommet, situé sur une bisécante $\omega_1\omega_2$ (s, p), la corde des contacts des tangentes rencontrant cette bisécante $\omega_1\omega_2$ doit s'appuyer sur une autre bisécante issue de x. Soit ω le paramètre du contact d'une de ces tangentes : d'après l'involution coplanaire, on a

$$\omega^2(p+1)+p+2s\omega+a^2=0.$$

Si ω_t et ω'_t sont les racines de cette équation et si l'on pose

$$p_t=\omega_t\omega'_t,\quad s_t=\omega_t+\omega'_t,$$

on a

$$s_t=-\frac{2s}{p+1},\qquad p_t=\frac{p+a^2}{p+1}.$$

Alors, une autre bisécante issue de x étant $\omega_3\omega_4(s', p')$, on a aussi

$$p'p_t+p'+p_t+s's_t+a^2=0,$$

ou

$$p'(p+a^2)+p'(p+1)+p+a^2-2ss'+a^2(p+1)=0.$$

Par l'intermédiaire de l'involution coplanaire qui lie s, p à s', p', on peut éliminer ss' : on a

$$p'(p+a^2)+p'(p+1)+p+a^2+2pp'+2p+2p'+2a^2+a^2(p+1)=0,$$

ou

$$4pp'+(p+p')(a^2+3)+4a^2=0,$$

ou, enfin, en posant $4b=a^2+3$,

$$pp'+b(p+p')+a^2=0.$$

Pour que x soit un point du lieu cherché, il faut que l'équation (P) ait la relation ci-dessus entre deux de ses racines; ou,

si l'on appelle p, p', p'' ses trois racines, il faut que le produit symétrique suivant soit nul :

$$\begin{aligned}&[pp'+b(p+p')+a^2][p'p''+b(p'+p'')+a^2][p''p+b(p''+p)+a^2]\\&\equiv(pp'p'')^2+2bpp'p''\Sigma pp'+a^2pp'p''\Sigma p+b^2[pp'p''\Sigma p+(\Sigma pp')^2]\\&+a^2b\Sigma pp'\Sigma p+3a^2bpp'p''+a^4\Sigma pp'+b^3(\Sigma p\Sigma pp'-pp'p'')\\&+a^2b^2[(\Sigma p)^2+\Sigma pp']+2a^4b\Sigma p+a^6.\end{aligned}$$

En remplaçant $pp'p''$, $\Sigma pp'$, Σp par leurs valeurs tirées de l'équation (P) et qui sont des fonctions cubiques de x, dans le produit précédent, et en égalant à zéro, on trouve l'équation du sixième ordre représentant la surface S.

En faisant $x_1 = x_4 = 0$ on annule tous les coefficients de l'équation (P), donc on annule deux facteurs dans chaque terme de l'équation S; tous les points de l'arête x_1x_4 du tétraèdre de référence sont donc des points doubles de la surface S. Mais cette arête est une corde principale et, par raison de symétrie, la même propriété appartient à chacune des trois cordes principales; leur point commun R est donc un point triple de la surface S. (Dans notre article des *Nouvelles annales de mathématiques*, nous avons dit, par inadvertance, que ce point R est un point double de la surface.)

La surface S, *lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à la biquadratique gauche rationnelle a pour droites doubles les cordes principales de la courbe et pour point triple le point commun à ces cordes.*

En se reportant à ce qui a été dit précédemment sur les quartiques trinodales quadrillées, on voit que si le centre de projection est sur une corde principale de γ_4, la courbe plane a un point double d'inflexion et deux séries de quadrangles inscrits; que si le centre de projection est en R, la courbe plane est triplement quadrillée à trois points doubles d'inflexion.

Surfaces du quatrième ordre.

21. On a vu qu'une quartique plane binodale est quadrillée quand son équation

$$x_3^2(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) + 2x_3x_1(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) + x_1^2(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0$$

satisfait à la condition $\Delta \equiv (abc) = 0$. Les éléments de ce déterminant,

$$a_1;\quad b_1, a_2;\quad c_1, b_2, a_3;\quad c_2, b_3;\quad c_3$$

sont respectivement les coefficients des termes de degré 0, 1, 2, 3, 4 en x_1.

Soit à présent une surface du quatrième ordre ayant deux points doubles aux sommets (124) et (134) du tétraèdre de référence. Son équation ne contient ni x_2 ni x_3 à une puissance supérieure à la seconde, mais x_1 et x_4 jusqu'à la quatrième. Coupons par un plan $x_4 = \lambda x_1$. La courbe d'intersection, projetée du sommet (123) sur la face x_4, s'obtient en substituant λx_1 à x_4. Les termes de l'équation résultante qui contiennent x_1 à la puissance i contiennent λ tout au plus à la puissance i. La section sera quadrillée quand le déterminant Δ sera nul. Les éléments de ce déterminant contiennent λ au plus à des puissances indiquées dans le tableau ci-après :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

de sorte que Δ s'annule pour six valeurs de λ. Il y a donc six sections par les nœuds qui sont quadrillées.

Les troisièmes points diagonaux des quadrangles inscrits sont sur six coniques. Chacune d'elles est, dans le plan de la section correspondante, la première polaire de l'un des nœuds relative à la première polaire de l'autre. Ces six coniques sont donc sur une même quadrique, savoir la première surface polaire de l'un

des points doubles relative à la première polaire de l'autre point double prise par rapport à la surface initiale.

Nous avons donc ce théorème : *Dans toute surface du quatrième ordre à deux points doubles, il y a six séries de* ∞^1 *quadrangles inscrits ayant deux de leurs points diagonaux aux deux nœuds. Les quadrangles de chaque série sont dans un même plan et les troisièmes points diagonaux de tous ces quadrangles engendrent six coniques situées sur une même quadrique.*

Les plans passant par les points doubles d'une surface binodale ne donnent pas toutes les sections binodales. Il faudrait considérer en outre les sections par les plans contenant un des nœuds et tangents en un autre point de la surface, et même les sections par les plans bitangents.

Ces dernières sections seraient aussi à étudier dans la surface du quatrième ordre la plus générale. On sait que dans cette surface les plans bitangents sont en nombre simplement infini; donc, il y a en a un nombre fini donnant une section quadrillée. Encore que l'énumération de ces plans soit possible, il exige un calcul trop long pour un résultat peut-être sans intérêt.

Il nous semble préférable d'examiner quelques surfaces spéciales du quatrième ordre contenant des points doubles en nombre simplement infini. Ces points doubles, s'ils ne sont pas tous en ligne droite, peuvent être répartis en ∞^2 couples. Par chacun de ces couples il passe six sections quadrillées avec points diagonaux aux points doubles. Ces ∞^2 plans enveloppent une surface; les ∞^3 diagonales des quadrangles engendrent un complexe; les troisièmes points diagonaux sont sur ∞^2 coniques.

Surface de Steiner.

22. Considérons en premier lieu la *surface romaine* de Steiner, dont l'équation peut s'écrire

$$S \equiv x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

le sommet (123) du tétraèdre de référence étant le point triple,

et les arêtes (12), (13), (23) étant les droites doubles. La quadrique polaire d'un point double $(0, 0, y_3, y_4)$ est

$$x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_3^2 - 2x_1 x_2 y_3 y_4 = 0.$$

On voit qu'elle se compose toujours de deux plans, et que ceux-ci coïncident quand on a $y_3 = \pm y_4$. Il y a donc, comme on le sait, sur chaque droite double, deux *points cuspidaux* séparés harmoniquement par le point triple et par la face x_4 du tétraèdre fondamental.

Une section plane quelconque est une quartique à trois nœuds A, B, C situés respectivement sur les arêtes (12), (13), (23); pour qu'une telle section ait des quadrangles inscrits à points diagonaux en B et C, il faut et il suffit que les tangentes en A séparent harmoniquement B et C, donc que les plans tangents en A à la surface séparent harmoniquement les faces 1 et 2. Mais l'équation précédente représente ces deux plans tangents et elle montre qu'ils sont harmoniques par rapport à x_1 et x_2 quand $y_4 = 0$ et seulement dans ce cas. Il faut donc que A soit le sommet (124) du tétraèdre.

Les plans des sections quadrillées de la surface de Steiner forment trois gerbes ayant leurs sommets aux conjugués harmoniques du point triple relativement aux couples de points cuspidaux sur les droites doubles.

Une seule section plane, celle produite par la face x_4, admet des quadrangles inscrits ayant leurs trois points diagonaux aux trois nœuds.

Un plan quelconque, $x_4 = \mu x_1 + \nu x_2$, par le sommet (124) coupe donc la surface S suivant une quartique quadrillée et le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits est une conique. Si B et C sont les points doubles de la section quadrillée sur les arêtes (23) et (13), les coordonnées de B sont 1, 0, 0, μ, celles de C sont 0, 1, 0, ν et la conique en question est la première polaire de B relative à la première polaire de C par rapport à la section. Cette conique est donc sur la première surface polaire de B relative à la première polaire

de C par rapport à la surface S, c'est-à-dire sur la quadrique

$$\mu\nu\frac{d^2S}{dx_3^2}+\mu\frac{d^2S}{dx_2dx_4}+\nu\frac{d^2S}{dx_1dx_4}+\frac{d^2S}{dx_1dx_2}$$
$$\equiv 2[-\mu x_4x_3-\nu x_2x_3+(2x_1x_2-x_3x_4)]$$
$$\equiv 2[2(x_1x_2-x_3x_4)+x_3(x_4-\mu x_1-\nu x_2)]=0.$$

L'intersection de cette surface et du plan $x_4=\mu x_1+\nu x_2$ est la conique cherchée et l'équation montre que, pour toute valeur de μ et ν, cette conique est sur la quadrique

$$x_1x_2-x_3x_4=0.$$

Ainsi, bien que la gerbe de sections quadrillées donne une double infinité de coniques pareilles, ces courbes ne forment qu'une quadrique. En intervertissant les rôles des droites doubles, on trouve donc ce théorème :

Les troisièmes points diagonaux des quadrangles inscrits dans les sections quadrillées de la surface de Steiner engendrent trois quadriques.

23. Les plans tangents à la surface de Steiner et issus du sommet considéré (124) touchent la surface sur la première polaire de ce sommet, c'est-à-dire sur la surface cubique

$$\frac{dS}{dx_3}\equiv 2(x_3x_2^2+x_3x_4^2-x_1x_2x_4)=0.$$

En multipliant par x_3, retranchant de 2S et supprimant le facteur $2x_1x_2$ étranger à la question, on retrouve la quadrique rencontrée plus haut,

$$x_1x_2-x_3x_4=0.$$

Elle contient deux droites doubles de la surface S, savoir x_1x_3 et x_2x_3, et deux autres arêtes, x_1x_4 et x_2x_4, du tétraèdre de référence. Elle coupe donc encore S suivant une biquadratique gauche ayant un point double au sommet (124); cette biquadratique est la courbe de contact du cône circonscrit ayant pour sommet le point (124).

La section par un des plans tangents issus de ce sommet est quadrillée; mais elle se compose de deux coniques, et l'on a vu que les tangentes au quatrième point commun sont séparées harmoniqement par les droites doubles (13) et (23), et ces tangentes en ce quatrième point sont les tangentes inflexionnelles de la surface. Réciproquement, si les tangentes inflexionnelles en un point de la surface sont harmoniquement séparées par deux droites doubles, la section par le plan tangent est une section quadrillée et le plan passe par un des sommets (124), (134), (234) du tétraèdre de référence.

Dans la surface de Steiner, le lieu des points où les tangentes inflexionnelles sont harmoniquement séparées par deux des droites doubles est une biquadratique gauche ayant un nœud sur la troisième droite double.

24. Pour chaque gerbe de sections planes quadrillées, les diagonales de quadrangles inscrits engendrent un complexe. Disons un mot de ces complexes.

Coupons la surface

$$S \equiv x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0$$

par le plan d'une section quadrillée, par exemple

$$x_4 = \mu x_2 + \nu x_3;$$

la courbe d'intersection, projetée sur la face x_4, du sommet opposé, a pour équation

$$x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3(\mu x_2 + \nu x_3) = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x_3^2 & 2\mu x_1x_3 - x_1^2 \\ x_2^2 & x_2^2 + x_1^2 - 2\nu x_1x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Un quadrangle variable inscrit a pour couples de côtés opposés

$$kx_3^2 + 2\mu x_1x_3 - x_1^2 = 0, \quad kx_2^2 + x_2^2 + x_1^2 - 2\nu x_1x_2 = 0.$$

Pour avoir les diagonales de ce quadrangle, il faut chercher un produit de deux formes du premier degré qui soit une

combinaison linéaire des deux fonctions précédentes. On trouve

$$\begin{aligned}
&[(1+k)x_2-\nu x_1+\sqrt{\frac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}}\,(kx_3+\mu x_1)]\\
&\qquad\qquad[(1+k)x_2-\nu x_1-\sqrt{\frac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}}\,(kx_3+\mu x_1)]\\
&\equiv(1+k)^2x_2^2-2\nu(1+k)x_2x_1+\nu^2x_1^2\\
&-\frac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}[k^2x_3^2+2k\mu x_3x_1+\mu^2x_1^2]\\
&\equiv(1+k)[(1+k)x_2^2-2\nu x_2x_1+x_1^2]\\
&-\frac{k(\nu^2-k-1)}{\mu^2+k}(kx_3^2+2\mu x_3x_1-x_1^2).
\end{aligned}$$

Nous avons donc, dans la première de ces trois lignes, le produit des diagonales du quadrangle variable. Exprimons qu'une de ces diagonales passe à la fois par un point x et par un point y.

$$(1)\quad\begin{cases}(1+k)x_2-\nu x_1=\pm\sqrt{\dfrac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}}\,(kx_3+\mu x_1),\quad \mu x_2+\nu x_3-x_4=0,\\ (1+k)y_2-\nu y_1=\pm\sqrt{\dfrac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}}\,(ky_3+\mu y_1),\quad \mu y_2+\nu y_3-y_4=0.\end{cases}$$

Pour avoir le complexe des diagonales, il suffit d'éliminer k, μ, ν. Les deux dernières relations donnent

$$\mu=\frac{x_4y_3-x_3y_4}{x_2y_3-x_3y_2}=\frac{p_{43}}{p_{23}},\qquad \nu=\frac{p_{24}}{p_{23}},$$

en appelant p_{ik} les coordonnées homogènes de la diagonale. Les deux relations (1) de gauche donnent par division

$$(2)\qquad k(1+k)p_{23}=\mu(1+k)p_{12}+\nu k p_{13};$$

en multipliant par y_2 la première des relations (1), par x_1 la seconde, et retranchant, on obtient

$$(1+k)p_{12}=\pm\sqrt{\frac{\nu^2-k-1}{\mu^2+k}}\,kp_{13},$$

d'où, en élevant au carré et chassant le dénominateur,

$$k(1+k)[(1+k)p_{12}^2+kp_{13}^2]=\nu^2k^2p_{13}^2-\mu^2(1+k)^2p_{12}^2;$$

en divisant par l'équation (2), on trouve successivement

$$\frac{(1+k)p_{12}^2+kp_{13}^2}{p_{23}}=\nu kp_{13}-\mu(1+k)p_{12},$$

$$k[p_{12}(p_{12}+\mu p_{23})+p_{13}(p_{13}-\nu p_{23})]=-p_{12}(p_{12}+\mu p_{23}),$$

$$k=\frac{-p_{12}(p_{12}+\mu p_{23})}{p_{12}(p_{12}+\mu p_{23})+p_{13}(p_{13}-\nu p_{23})},$$

$$1+k=\frac{p_{13}(p_{13}-\nu p_{23})}{p_{12}(p_{12}+\mu p_{23})+p_{13}(p_{13}-\nu p_{23})}.$$

Substituons à k et $1+k$ leurs valeurs dans l'égalité (2) :

$$-p_{12}p_{13}p_{23}(p_{12}+\mu p_{23})(p_{13}-\nu p_{23})$$
$$=p_{12}p_{13}[p_{12}(p_{12}+\mu p_{23})+p_{13}(p_{13}-\nu p_{23})][\mu(p_{13}-\nu p_{23})-\nu(p_{12}+\mu p_{23})].$$

Simplifions par $p_{12}p_{13}$ et remplaçons μp_{23} par p_{43} et νp_{23} par p_{24},

$$p_{23}^2(p_{12}+p_{13})(p_{43}-p_{24})$$
$$=[p_{12}(p_{12}+p_{43})+p_{13}(p_{13}-p_{24})][p_{43}(p_{13}-p_{24})-p_{24}(p_{12}+p_{43})].$$

C'est l'équation d'un complexe du quatrième ordre. Dans chacun des termes, deux facteurs s'annulent si l'on pose

$$p_{12}+p_{43}=0,\quad p_{13}-p_{24}=0,$$

ou, pour employer une notation plus usitée,

$$p_{12}-p_{34}=0,\quad p_{13}+p_{42}=0.$$

Ces dernières égalités représentent donc une congruence linéaire double pour le complexe. Les rayons de cette congruence rencontrent tous la droite commune aux plans

$$x_2+x_3=0,\quad x_4+x_5=0,$$

car les coordonnées tangentielles de ces plans peuvent s'écrire

$$0,\ 1,\ 1,\ 0;\quad 1,\ 0,\ 0,\ 1$$

et les coordonnées de leur intersection sont

$$-q'_{12} = -q'_{13} = -q'_{42} = q'_{34} = 1, \quad q'_{14} = q'_{23} = 0.$$

d'où

$$\Sigma q'_{ik} p_{ik} \equiv -p_{12} - p_{13} - p_{42} + p_{34},$$

et cette expression est nulle si la droite p fait partie des deux complexes $p_{12} + p_{34} = 0$ et $p_{13} - p_{42} = 0$. Or $x_4 = -x_1$ représente le plan mené par l'arête (14) du tétraèdre et par un point cuspidal de l'arête opposée, sur laquelle est aussi le sommet (234) de la gerbe considérée. Et $x_2 + x_3 = 0$ représente le plan tangent à la surface S au point cuspidal en question. On vérifie de même que les rayons de la congruence double rencontrent aussi la droite

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_4 - x_1 = 0$$

qui passe par l'autre point cuspidal de l'arête (23).

Les diagonales des quadrangles inscrits dans les sections quadrillées d'une même gerbe engendrent un complexe du quatrième ordre ayant une congruence linéaire double. Les directrices d_1 *et* d_2 *de cette congruence passent chacune par un des points cuspidaux alignés sur le sommet de la gerbe, sont dans le plan tangent en ce point cuspidal et s'appuient sur l'arête opposée du tétraèdre.*

Un cône quelconque du complexe est du quatrième ordre et a une génératrice double s'appuyant sur d_1 et d_2; une courbe quelconque du complexe est de quatrième classe et possède une tangente double s'appuyant sur d_1 et d_2.

Les trois gerbes de sections quadrillées donnent trois couples de droites d_1, d_2. On voit aisément que chacun de ces couples de droites forme, avec les arêtes du tétraèdre de référence sur lesquelles elles s'appuient, l'intersection de deux des trois quadriques

$$x_1 x_2 = x_3 x_4, \quad x_1 x_3 = x_2 x_4, \quad x_1 x_4 = x_2 x_3,$$

lieux des troisièmes points diagonaux des quadrangles inscrits.

25. Si l'on prend encore la gerbe de sommet (234) par exemple, les côtés des quadrangles inscrits qui rencontrent les

arêtes (12) ou (13) du tétraèdre de référence forment, trop évidemment, deux complexes linéaires spéciaux. Mais on peut se demander quelle figure ces couples de côtés engendrent quand le troisième point diagonal des quadrangles reste fixe sur la quadrique

$$x_1x_4 = x_2x_3.$$

Soient mn, m, n, 1 les coordonnées d'un point de cette surface, et supposons que, dans une section quadrillée par le sommet (234), un certain quadrangle inscrit envoie ses deux diagonales par le point en question. D'après le numéro précédent, ce fait s'exprime par les relations

$$(1 + k)m - \nu mn = \sqrt{\frac{\nu^2 - k - 1}{\mu^2 + k}}\,(kn + \mu mn),$$

$$(1 + k)m - \nu mn = -\sqrt{\frac{\nu^2 - k - 1}{\mu^2 + k}}\,(kn + \mu mn),$$

d'où l'on tire

$$1 + k = \nu n, \quad k = -\mu m.$$

Dans chaque section quadrillée de la gerbe (234), les côtés des quadrangles inscrits qui rencontrent l'arête (12) forment l'involution

$$(1 + k)x_2^2 + x_1^2 - 2\nu x_1x_2 = 0.$$

Ces diverses relations doivent être combinées avec

$$x_4 = \mu x_2 + \nu x_3$$

et il faut en éliminer μ, ν, k. On a successivement

$$\nu n x_2^2 + x_1^2 - 2\nu x_1x_2 = 0,$$

$$\nu = \frac{x_1^2}{x_2(2x_1 - x_2)},$$

$$\mu = \frac{1 - \nu n}{m} = \frac{2x_1x_2 - n(x_1^2 + x_2^2)}{mx_2(2x_1 - x_2)},$$

$$mx_2x_4(2x_1 - nx_2) + nx_2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2^2 - x_1^2x_3 = 0.$$

Cette équation représente une surface du troisième ordre ayant l'arête (12) pour droite double.

Dans chaque gerbe de sections planes quadrillées, il y a une infinité simple de quadrangles inscrits dont les diagonales se coupent en un point donné de la quadrique $x_1x_4 = x_2x_3$. *Les couples de côtés opposés de ces quadrangles engendrent deux surfaces cubiques ayant chacune pour droite double une arête du tétraèdre fondamental.*

Surface du quatrième ordre à cubique gauche double.

26. Les équations paramétriques de la courbe double étant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1,$$

la surface considérée la plus générale a pour équation, comme nous l'avons montré dans l'Étude précédente,

$$a_X^2 \equiv \Sigma a_{ik} X_i X_k = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

pourvu que l'on pose

$$X_1 = x_2x_4 - x_3^2, \quad X_2 = x_2x_3 - x_1x_4, \quad X_3 = x_1x_3 - x_2^2.$$

Les ∞^3 sections planes sont des quartiques trinodales, parmi lesquelles ∞^2 sont quadrillées. Les plans de ces dernières enveloppent une surface. Pour chercher l'équation de cette surface, nous appliquons le principe de translation de Clebsch avec une modification qu'il convient de signaler.

Pour l'usage que l'on fait de ce principe dans la théorie des invariants d'une surface, la plus générale de son ordre, chaque plan est déterminé par trois quelconques de ses points. Ici il est question d'une surface spéciale et le plan u d'une section sera défini par les trois points où il coupe la courbe double. Soient θ_1, θ_2, θ_3 les paramètres de ces trois points, généralement distincts; un point quelconque du plan u a pour coordonnées

$$\rho x_1 = \lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3,$$
$$\rho x_2 = \lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2,$$
$$\rho x_3 = \lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3,$$
$$\rho x_4 = \lambda + \mu + \nu,$$

et λ, μ, ν sont, dans le plan u, les coordonnées du point x rapporté au triangle dont les sommets sont θ_1, θ_2, θ_3.

Portons les valeurs de x_i, d'abord dans les formes X_i :

$$\rho^2 X_1 = (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3)^2 = \Sigma\lambda\mu(\theta_1 - \theta_2)^2,$$

$$\rho^2 X_2 = (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3) - (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda + \mu + \nu) = \Sigma - \lambda\mu(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)^2,$$

$$\rho^2 X_3 = (\lambda\theta_1^5 + \mu\theta_2^5 + \nu\theta_3^5)(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3) - (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)^3 = \Sigma\lambda\mu\theta_1\theta_2(\theta_1 - \theta_2)^2.$$

La substitution dans l'équation $a_x^2 = 0$ donne le résultat symbolique suivant :

$$\{\Sigma(\theta_1 - \theta_2)^2\lambda\mu[a_1 - a_2(\theta_1 + \theta_2) + a_3\theta_1\theta_2]\}^2 = 0.$$

Pour que la section soit quadrillée avec des quadrangles ayant deux points diagonaux en θ_1 et θ_2, nous avons vu que le terme en $\lambda\,\mu\,\nu^2$ de l'équation précédente doit s'annuler; donc, si l'on fait abstraction du facteur étranger, généralement non nul, $(\theta_2 - \theta_3)^2(\theta_3 - \theta_1)^2$, on doit avoir

$$[a_1 - a_2(\theta_2 + \theta_3) + a_3\theta_2\theta_3][a_1 - a_2(\theta_3 + \theta_1) + a_3\theta_3\theta_1] = 0.$$

Développons, sous forme non symbolique,

$$a_{11} - a_{12}(\Sigma\theta + \theta_3) + a_{13}(\theta_3\Sigma\theta - \theta_3^2) + a_{22}(\Sigma\theta_1\theta_2 + \theta_3^2) - a_{23}(\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\Sigma\theta_1\theta_2) + a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3^2 = 0,$$

ou encore

$$a_{11} - a_{12}\Sigma\theta + a_{22}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{23}\theta_1\theta_2\theta_3 - \theta_3(a_{12} - a_{13}\Sigma\theta + a_{23}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3) + \theta_3^2(a_{22} - a_{13}) = 0,$$

en abrégé

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0,$$

n et p étant des fonctions symétriques de θ_1, θ_2, θ_3. Il est facile d'introduire ici les coordonnées du plan u, car on a

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -\Sigma\theta : \Sigma\theta_1\theta_2 : -\theta_1\theta_2\theta_3;$$

appelons M, N, P ce que deviennent m, n, p quand on fait ces substitutions; en d'autres termes, écrivons

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= m = a_{22} - a_{15}, \\ \mathrm{N}u_1 &= -(a_{12}u_1 + a_{15}u_2 + a_{25}u_5 + a_{55}u_4), \\ \mathrm{P}u_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{22}u_5 + a_{25}u_4. \end{aligned}$$

L'équation $m\theta_5^2 + n\theta_5 + p = 0$ devient alors

$$\mathrm{M}\theta_5^2 + \mathrm{N}\theta_5 + \mathrm{P} = 0.$$

Elle exprime une certaine *liaison* entre un plan u et un point θ_5 de la cubique; si, en outre, ce point est dans le plan u, ou si l'on a

$$u_1\theta_5^3 + u_2\theta_5^2 + u_3\theta_5 + u_4 = 0,$$

le plan u est une section quadrillée. L'enveloppe de ce plan se trouve en éliminant simplement θ_5 entre les deux dernières égalités. Le résultant est un déterminant à cinq lignes; mais les formes N et P contiennent u_1 en dénominateur; pour chasser ce dénominateur, on multiplie les trois premières lignes du déterminant par u_1 et l'on divise ensuite la première colonne par u_1; on obtient

$$\mathrm{F}_4 \equiv \begin{vmatrix} . & . & \mathrm{M}u_4 & (\mathrm{N}u_4) & (\mathrm{P}u_4) \\ . & \mathrm{M}u_4 & (\mathrm{N}u_4) & (\mathrm{P}u_4) & . \\ \mathrm{M} & (\mathrm{N}u_4) & (\mathrm{P}u_4) & . & . \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 & . \\ . & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une surface de quatrième classe. Elle est vérifiée pour $u_4 = (\mathrm{P}u_4) = 0$, et ces deux relations représentent deux points; la droite qui les joint est donc tout entière sur F_4. Mais $u_4 = 0$ représente le sommet (123) du tétraèdre de référence ou le point de paramètre nul de la cubique gauche. Ce point peut être évidemment un point quelconque de la courbe; donc F_4 est une surface réglée et, par suite, elle est du quatrième ordre.

On pouvait prévoir que l'enveloppe cherchée serait une surface réglée en se reportant à l'équation

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0$$

qui, pour chaque valeur de θ_3, donne une involution de points θ_1 et θ_2. Les droites joignant ces couples de points engendrent un système réglé et sont projetées du point θ_3 suivant un faisceau de plans; l'axe de ce faisceau est une génératrice rectiligne de l'enveloppe cherchée F_4.

Nous pouvons obtenir les plans tangents doubles de F_4, ou les plans des sections doublement quadrillées de la surface initiale donnée S_4. Si u est un de ces plans, il présente la liaison

$$M\theta_3^2 + N\theta_3 + P = 0$$

avec *deux* des points où il coupe la cubique; donc cette équation et la suivante,

$$u_1\theta_3^3 + u_2\theta_3^2 + u_3\theta_3 + u_4 = 0,$$

ont *deux* racines communes, ce qui s'exprime par l'évanouissement d'une matrice à quatre colonnes et trois lignes; en chassant encore le dénominateur u_1, on obtient

$$\left\| \begin{array}{cccc} . & Mu_1 & (Nu_1) & (Pu_1) \\ M & (Nu_1) & (Pu_1) & . \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \right\| = 0,$$

ce qui, d'après notre *Première Étude*, représente une développable de troisième classe ou la développable osculatrice d'une cubique gauche.

Ainsi, *l'enveloppe des sections quadrillées d'une surface* S_4 *du quatrième ordre à cubique double est une surface de quatrième classe* F_4, *ayant une développable bitangente de troisième classe.*

27. Quand une surface réglée de quatrième classe a une développable bitangente de troisième classe, elle a soit une cubique double, soit une droite triple. Il faut examiner lequel

de ces deux cas se présente ici : la théorie de l'élimination va nous fournir encore la réponse à cette question.

Remarquons que, si θ_3 désigne un point fixe de la cubique gauche, double sur S_4, l'équation

$$Mu_1\theta_3^2 + (Nu_1)\theta_3 + (Pu_1) = 0$$

ou

$$(a_{22} - a_{13})u_1\theta_3^2 - (a_{12}u_1 + a_{13}u_2 + a_{23}u_3 + a_{33}u_4)\theta_3 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4 = 0$$

est celle d'un point y ; tout plan u qui passe par ce point et par le point θ_3 est tangent à la surface F_4 ; la droite qui joint ce point y au point θ_3 de la cubique gauche est une génératrice de F_4. Un point x quelconque de cette génératrice est donné par les relations

$$y_i = \lambda x_i + \mu\theta_3^{4-i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
(a_{22} - a_{13})\theta_3^3 - a_{12}\theta_3 + a_{11} &= \lambda x_1 + \mu\theta_3^3,\\
- a_{13}\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 + \mu\theta_3^2,\\
- a_{23}\theta_3 + a_{22} &= \lambda x_3 + \mu\theta_3,\\
- a_{33}\theta_3 + a_{23} &= \lambda x_4 + \mu.
\end{aligned}$$

En éliminant λ, μ, θ_3, on a l'équation ponctuelle de F_4. Éliminons d'abord μ : multiplions chacune des trois dernières relations par θ_3 et retranchons chaque fois de la précédente

$$\begin{aligned}
a_{22}\theta_3^2 - 2a_{12}\theta_3 + a_{11} &= \lambda x_1 - \lambda\theta_3 x_2,\\
a_{23}\theta_3^2 - (a_{13} + a_{22})\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 - \lambda\theta_3 x_3,\\
a_{33}\theta_3^2 - 2a_{23}\theta_3 + a_{22} &= \lambda x_3 - \lambda\theta_3 x_4.
\end{aligned}$$

Il faudrait encore éliminer λ et θ_3 ; mais ce calcul est superflu : nous ne cherchons que les points triples de F_4 s'il y en a ; à cet effet, nous devons écrire les conditions pour que les trois dernières égalités soient satisfaites par *trois* systèmes de valeurs déterminées de λ et θ_3. Or ces égalités sont, dans un plan rapporté à des axes cartésiens λ et θ_3, les équations de trois coniques

ayant l'axe des θ_5 comme direction asymptotique commune. Pour que ces courbes aient trois points communs à distance finie, il faut qu'elles forment faisceau ou que l'on ait

$$\begin{Vmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{11} & x_1 & x_2 \\ a_{23} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{12} & x_2 & x_3 \\ a_{33} & a_{23} & a_{22} & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

En général, ces conditions sont incompatibles. Mais elles représentent une droite quand on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est donc la condition pour que la surface F_4 ait une droite triple. Elle exprime, entre la surface donnée S_4 et sa cubique double, une relation invariante que nous allons interpréter. Observons d'abord que, si la condition se réalise, la droite triple de F_4 est une bisécante de la cubique double de S_4, car ses équations prennent la forme

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0,$$
$$\lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 = 0.$$

28. L'équation de la surface S_4 étant symboliquement

$$a_x^2 = 0,$$

nous avons montré, dans l'*Étude* précédente, que le cône circonscrit à S_4 et ayant son sommet au point (123) du tétraèdre de référence a pour équation

$$a_u^2 = 0,$$

les quantités u_1, u_2, u_3 étant, dans la gerbe de sommet (123), des coordonnées tangentielles ou coordonnées de plan.

Considérons une génératrice de S_4 s'appuyant sur la cubique double aux points de paramètres θ et θ'; le plan qui la projette

du sommet (123) a des coordonnées proportionnelles aux quantités

$$1, \quad (\theta + \theta'), \quad \theta\theta', \quad 0;$$

comme ce plan est tangent au cône en question, on a

$$[a_1 - a_3(\theta + \theta') + a_7\theta\theta']^2 = 0,$$

ou, en développant sous forme non symbolique,

$$a_{11} - 2a_{12}\theta' + a_{22}\theta'^2 + 2\theta[a_{12} - (a_{22} + a_{13})\theta' + a_{23}\theta'^2] + \theta^2[a_{22} - 2a_{23}\theta' + a_{33}\theta'^2] = 0.$$

A un point θ répondent, par l'intermédiaire de cette relation, deux points θ'; à l'un de ces points θ' répond, outre le point θ, un point θ''; à celui-ci un nouveau point θ''', etc. Si le quatrième point de cette série coïncide avec le premier, la surface S_4 est *spéciale*, en ce sens qu'elle est engendrée par les bisécantes d'une cubique gauche qui s'appuient sur une droite; alors il y a ∞ *triangles de Poncelet* inscrits au cône qui projette la cubique gauche d'un de ses points et circonscrits au cône de même sommet tangent à S_4. Mais pour qu'il y ait, non des triangles, mais des *quadrilatères de Poncelet*, en d'autres termes pour que le cinquième point de la série θ, θ', θ'', ... coïncide avec le premier, ou encore que les génératrices de S_4 s'arrangent en ∞^1 quadrilatères inscrits à la cubique gauche, il faut que la dernière relation écrite donne, pour deux valeurs généralement distinctes de θ, le même couple de valeurs de θ'. Nous sommes donc ramené au problème d'algèbre qui résout la question des *quadrangles de Steiner* dans la quartique binodale, avec cette spécialisation que la relation en θ et θ' est symétrique. Or nous avons vu que ces quadrangles steinériens existent quand on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{22} + a_{13}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément la condition trouvée ci-dessus pour l'existence d'une droite triple sur la surface F_4.

Dans toute surface du quatrième ordre ayant une cubique gauche double, les plans des sections quadrillées enveloppent une autre surface du quatrième ordre, douée en général d'une cubique gauche double, et exceptionnellement d'une droite triple, bisécante de la cubique initiale; cette dernière circonstance se réalise quand les génératrices de la surface donnée sont les côtés d'une infinité simple de quadrilatères gauches inscrits dans la cubique donnée.

Observons en passant que le raisonnement fait en dernier lieu ramène toujours le problème des *polygones de Poncelet* à $2n$ côtés pour deux coniques à un cas particulier du problème des *polygones de Steiner* de $2n$ côtés pour la quartique plane binodale.

29. Si l'on demande une section plane triplement quadrillée de la surface S_4, il faut trouver un plan u qui présente la liaison

$$M\theta^2 + N\theta + P = 0$$

avec chacun des trois points où il coupe la cubique; cette équation du second degré devant avoir trois racines, ses coefficients doivent être nuls,

$$\begin{aligned} &M \equiv a_{22} - a_{13} = 0, \\ &Nu_4 \equiv -(a_{12}u_1 + a_{13}u_2 + a_{23}u_3 + a_{33}u_4) = 0, \\ &Pu_4 \equiv a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4 = 0. \end{aligned}$$

La première de ces relations est indépendante de u. Elle n'est vérifiée que si le cône circonscrit à S_4 et de sommet (123) est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à la cubique double; car les équations tangentielles de ces cônes s'écrivent

$$a_u^2 = 0, \quad u_2^2 - 4u_1u_3 = 0,$$

et si l'on forme l'invariant simultané qui contient au premier degré les coefficients de la première forme, on trouve

$$2(a_{22} - a_{13}).$$

L'évanouissement de cet invariant est incompatible avec la condition d'une droite triple de F_4, car si, dans cette condition (voir le numéro précédent), on remplace a_{22} par a_{13} ou inversement, on trouve que le discriminant de la forme a_u^2 s'annule et alors la surface donnée S_4 dégénère en deux quadriques.

Quand donc la condition $a_{22} = a_{13}$ est vérifiée, la surface F_4 a un faisceau de plans tangents triples et c'est une surface du quatrième ordre à cubique double, mais spéciale.

Lorsque le cône circonscrit à la surface donnée S_4 *et ayant son sommet sur la cubique double est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à cette cubique, l'enveloppe des sections quadrillées est une surface* F_4 *engendrée par les cordes d'une seconde cubique gauche qui s'appuient sur une droite fixe. Les plans passant par cette droite sont les sections triplement quadrillées de* S_4.

Surface du quatrième ordre à deux droites doubles.

30. Supposons que les droites doubles ne se coupent pas et prenons-les pour arêtes (12) et (34) du tétraèdre de référence; l'équation de la surface considérée est de la forme

$$S_4 \equiv x_3^2 f_1 + x_3 x_4 f_2 + x_4^2 f_3 = 0,$$

les fonctions f_i étant quadratiques en x_1 et x_2. On peut encore écrire symboliquement

$$S_4 \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 (b_1 x_3 + b_2 x_4)^2 = 0.$$

Un plan u sera défini par les trois points où il coupe les arêtes (12), (34) et (14) par exemple :

$$0, 0, 1, h; \quad 1, k, 0, 0; \quad 0, 1, l, 0.$$

Un point x de ce plan est donné par les formules

$$\rho x_1 = \mu, \qquad \rho x_2 = \mu k + \nu,$$
$$\rho x_3 = \lambda + \nu l, \quad \rho x_4 = \lambda h.$$

Substituons dans l'équation de S_4 :

$$(a_1\mu + a_2\mu k + a_2\nu)^2(b_1\lambda + b_1\nu l + b_2\lambda h)^2 = 0,$$

ou, en développant en partie,

$$[\mu^2(a_1 + a_2k)^2 + 2\mu\nu a_2(a_1 + a_2k) + a_2^2\nu^2]$$
$$[\lambda^2(b_1 + b_2h)^2 + 2\lambda\nu b_1 l(b_1 + b_2h) + \nu^2 b_1^2 l^2] = 0.$$

La condition pour que la section soit quadrillée s'écrit symboliquement

$$F_6 \equiv \begin{vmatrix} (a_1+a_2k)^2(b_1+b_2h)^2 & (a_1+a_2k)^2(b_1+b_2h)b_1 l & (a_1+a_2k)^2 b_1^2 l^2 \\ (a_1+a_2k)(b_1+b_2h)^2 a_2 & (a_1+a_2k)(b_1+b_2h)a_2 b_1 l & (a_1+a_2k)a_2 b_1^2 l^2 \\ (b_1+b_2h)^2 a_2^2 & (b_1+b_2h)a_2^2 b_1 l & a_2^2 b_1^2 l^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le facteur l^5 peut se mettre en évidence, de sorte que la condition de section quadrillée se réalise indépendamment du point l où le plan u coupe l'arête (14); c'est-à-dire que, si un plan de section quadrillée coupe les droites doubles en M et N, tous les plans du faisceau ayant pour axe MN sont des sections quadrillées. L'enveloppe cherchée est donc une surface réglée dont les génératrices s'appuyent sur les droites doubles de S_4.

D'ailleurs, les coordonnées du plan u satisfont aux relations

$$u_3 + hu_4 = 0, \quad u_1 + ku_2 = 0, \quad u_2 + lu_3 = 0,$$

d'où

$$h = -\frac{u_3}{u_4}, \quad k = -\frac{u_1}{u_2}.$$

Remplaçons dans F_6, après avoir supprimé les l,

$$F_6 \equiv \begin{vmatrix} (a_1u_2-a_2u_1)^2(b_1u_4-b_2u_3)^2 & (a_1u_2-a_2u_1)^2(b_1u_4-b_2u_3)b_1 & (a_1u_2-a_2u_1)^2 b_1^2 \\ (a_1u_2-a_2u_1)(b_1u_4-b_2u_3)^2 a_2 & (a_1u_2-a_2u_1)(b_1u_4-b_2u_3)a_2 b_1 & (a_1u_2-a_2u_1)a_2 b_1^2 \\ (b_1u_4-b_2u_3)^2 a_2^2 & (b_1u_4-b_2u_3)a_2^2 b_1 & a_2^2 b_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation symbolique montre que l'enveloppe est de sixième classe et, comme c'est une surface réglée, elle est aussi du sixième ordre.

Les variables u_1, u_2 ne figurent qu'au troisième degré, de

même que u_3, u_4; donc les plans contenant les arêtes (12) et (34) sont des plans tangents triples, et ces arêtes elles-mêmes sont des droites triples de la surface F_6.

Ainsi, *dans toute surface du quatrième ordre à deux droites doubles, les plans des sections quadrillées enveloppent une surface réglée du sixième ordre ayant pour droites triples les droites doubles de la surface donnée.*

Le même problème peut être résolu pour les surfaces du quatrième ordre à conique double; mais, comme la méthode est la même et que les calculs sont fort longs, nous renonçons à placer ici cette solution.

Tables graphiques pour la représentation des fonctions.

31. Nous appliquons maintenant les résultats de nos premiers paragraphes à certains problèmes d'intégration graphique. Comme nous l'avons dit, dans notre introduction, c'est une de de ces questions qui nous a suggéré toute l'*Étude* actuelle. Nous devons faire d'abord, afin de poser le problème, quelques emprunts à M. Massau (*); nous changeons un peu les notations de son travail.

Soit à représenter la fonction z, de deux variables indépendantes x, y, définie par l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Menons dans un plan deux axes cartésiens, des u et des v, et construisons les deux séries de courbes

$$f_1(u, v, x) = 0,$$
$$f_2(u, v, y) = 0.$$

Entre les trois équations précédentes, éliminons x et y; soit la résultante

$$f_3(u, v, z) = 0.$$

(*) Massau, *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications.* Liége, Desoer, 1884, pp. 24 et suiv. [Voir aussi, Massau, *C. R. de l'Acad. des sciences* de Paris, 1907.]

Les systèmes de courbes f_1, f_2, f_3, où u et v sont les coordonnées courantes et x, y, z des paramètres variables, s'appellent respectivement les lignes des x, des y et des z. A tout système de valeurs de x et de y correspond une ligne f_1 et une ligne f_2; par chaque point d'intersection de ces courbes, il passe un nombre fini de lignes f_3, donnant chacune une valeur de z correspondant aux valeurs données de x et de y.

Tel est le principe d'où part M. Massau. Plus spécialement il choisit comme fonctions f_1, f_2, f_3, des fonctions linéaires de u, v, donc des formes telles que

$$au + bv + c,$$

où a, b, c sont des fonctions de x ou de y ou de z. Un de ces systèmes de droites est dit du degré n si a, b, c sont des fonctions du $n^{\text{ème}}$ degré en x, en y ou en z.

32. On peut se demander d'abord quelles sont les fonctions représentées par trois systèmes du premier degré; nous allons traiter cette question que M. Massau a déjà résolue lui-même par une méthode un peu différente.

Soient

$$\begin{aligned} a_x u + b_x v + c_x &= 0, \\ a'_y u + b'_y v + c'_y &= 0, \\ a''_z u + b''_z v + c''_z &= 0 \end{aligned}$$

les équations respectives des lignes des x, des y et des z; on a écrit en abrégé a_x pour $a_1 x + a_2$, etc. La table graphique représente une fonction z définie par l'égalité ci-après obtenue en éliminant u et v :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \\ a''_z & b''_z & c''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du troisième degré contient seulement la première puissance de chacune des coordonnées courantes; elle représente une surface du troisième ordre F_3, ayant pour points

doubles les points à l'infini sur les axes et passant par les droites à l'infini des plans coordonnés.

L'équation de F_3 est vérifiée, quel que soit z, par les valeurs de x et y qui satisfont aux relations

$$(a_x a'_y a'_1{}') \equiv \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \\ a'_1{}' & b'_1{}' & c'_1{}' \end{vmatrix} = 0, \quad (a_x a'_y a'_2{}') \equiv \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \\ a'_2{}' & b'_2{}' & c'_2{}' \end{vmatrix} = 0.$$

D'après notre *Première Étude*, ces valeurs de x et de y annulent les deux matrices suivantes :

$$\| \quad a_x \quad a'_y \quad \|^3_1, \qquad \| \quad a_x \quad a'_y \quad a'_1{}' \quad a'_2{}' \quad \|.$$

L'évanouissement de ces matrices représente deux cubiques gauches de deux systèmes conjugués sur la surface cubique; mais ces cubiques gauches dégénèrent chacune en trois droites, savoir les droites à l'infini des plans (yz) et (xz) et une troisième droite parallèle à Oz; les équations de cette troisième droite, pour chacune des deux matrices précédentes, se trouvent facilement et sont respectivement

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(a_2 a'_1 a'_2)}{(a_1 a'_1 a'_2)} \\ y = -\dfrac{(a_1 a_2 a'_2)}{(a_1 a_2 a'_1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{(a_2 a'_1{}' a'_2{}')}{(a_1 a'_1{}' a'_2{}')} \\ y = -\dfrac{(a'_2 a'_1{}' a'_2{}')}{(a'_1 a'_1{}' a'_2{}')} \end{cases}.$$

Ces droites sont tout entières sur la surface cubique, puisque leurs équations, avec une valeur arbitraire de z, vérifient l'équation de la surface. En intervertissant les rôles des variables, on trouve aussi sur la surface deux droites parallèles à Ox et deux autres parallèles à Oy ; dans chacun de ces couples, il y a une droite du premier des systèmes conjugués ci-dessus et une de l'autre système. Il suffit d'écrire de même les équations de toutes ces droites pour voir que l'une quelconque d'entre elles rencontre celles du système opposé qui ne lui sont pas parallèles; en d'autres termes, la surface cubique possède deux droites parallèles à chacun des axes coordonnés; ces six droites forment

un hexagone gauche, dont les côtés alternants appartiennent à un des deux systèmes conjugués de cubiques gauches sur la surface cubique.

33. On peut poser le problème inverse : Connaissant une équation du troisième degré en x, y, z qui ne contient chacune des variables qu'à la première puissance, construire une table graphique des valeurs de z, au moyen de trois systèmes du premier degré. La possibilité du problème dépend de deux sortes de circonstances : du nombre de constantes de l'équation donnée qui doit être identifiée à $(ab'c'') = 0$ et de la réalité des solutions.

Puisque, par hypothèse, la fonction donnée est linéaire en x, en y et en z, son évanouissement représente déjà une surface cubique ayant trois points doubles à l'infini sur les axes et contenant les droites de l'infini des plans coordonnés. Soit

$$z\varphi_2(x, y) + \psi_2(x, y) = 0$$

l'équation donnée ; elle est satisfaite par une valeur arbitraire de z et par les valeurs de x et y qui annulent à la fois φ_2 et ψ_2; c'est-à-dire que les droites de la surface, parallèles à l'axe des z, sont données par les points communs aux courbes φ_2 et ψ_2; ce sont des hyperboles à asymptotes parallèles qui se coupent donc encore en deux points à distance finie, points réels ou imaginaires conjugués.

Supposons le premier cas réalisé et soit (x_0, y_0) un des deux points d'intersection de φ_2 et ψ_2; soit (x_1, y_1) un autre point quelconque de φ_2; les couples de droites $(x - x_0)(y - y_1) = 0$ et $(y - y_0)(x - x_1) = 0$ passent par quatre points de la courbe φ_2, savoir (x_0, y_0), (x_1, y_1) et les points à l'infini des axes; cette courbe φ_2 et ces deux couples de droites sont donc trois éléments d'un faisceau de coniques, et l'on doit avoir

$$\varphi_2 \equiv l(x - x_0)(y - y_1) + m(x - x_1)(y - y_0).$$

De même, si (x_2, y_2) est un point de ψ_2 non situé sur φ_2, on aura

$$\psi_2 \equiv \lambda(x - x_0)(y - y_2) + \mu(x - x_2)(y - y_0).$$

L'équation proposée $z\varphi_2 + \psi_2 = 0$ se ramène alors à

$$(x - x_0)[lz(y - y_1) + \lambda(y - y_2)] + (y - y_0)[mz(x - x_1) + \mu(x - x_2)] = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & -m(x - x_1) & -\mu(x - x_2) \\ y - y_0 & l(y - y_1) & \lambda(y - y_2) \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Comme on a choisi arbitrairement les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), le problème proposé peut être résolu d'une infinité de manières, mais il peut arriver que toutes les solutions soient imaginaires. Le raisonnement précédent conduit à ce théorème connu, du moins en partie :

Si une surface cubique a trois points doubles et passe conséquemment par les droites joignant ces points deux à deux, elle contient en outre deux droites par chaque point double; ces six dernières droites forment un hexagone gauche et sont toutes réelles ou imaginaires conjuguées deux à deux.

34. Passons à la fonction représentée par trois systèmes du second degré. Elle est définie par l'évanouissement d'un déterminant de neuf formes quadratiques, et nous pouvons écrire symboliquement

$$F_6 \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y'^2 & b_y'^2 & c_y'^2 \\ a_z''^2 & b_z''^2 & c_z''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du sixième ordre ne contient aucune des variables à une puissance supérieure à la seconde.

Nous allons d'abord établir quelques propositions relatives à la surface F_6 *spéciale* qui annule un déterminant de la forme ci-dessus; ensuite, nous donnerons des propriétés, plutôt négatives, de la surface la plus *générale* du sixième degré contenant au plus le carré de chaque variable; enfin, nous verrons les conditions pour que cette surface générale puisse s'écrire sous la forme spéciale du déterminant.

D'abord toute surface du sixième ordre dont l'équation contient chaque variable au plus au second degré possède trois points quadruples à l'infini sur les axes et trois droites doubles à l'infini dans les plans coordonnés.

En particulier, si nous considérons l'équation

$$F_6 \equiv (a_x^2\ b_y'^2\ c_z''^2) = 0,$$

et si nous donnons à z une valeur particulière, les éléments de la dernière ligne sont des constantes, on peut, par soustraction de colonnes, annuler deux de ces constantes et l'on n'a plus qu'un déterminant à deux lignes d'éléments quadratiques en x et en y. D'après le n° 2, il représente une quartique plane binodale *quadrillée*. On trouve le même résultat en faisant x ou y constant.

Dans la surface F_6 *spéciale, toute section par une droite double est une quartique binodale quadrillée.*

En donnant à z une valeur constante arbitraire, on obtient une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y'^2 & b_y'^2 & c_y'^2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Pour tout système de valeurs de λ, μ, ν, elle représente une courbe quadrillée et, d'après le n° 15, toutes ces courbes ont quatre points communs et deux quelconques d'entre elles se coupent encore aux sommets d'un quadrangle parallèle aux axes des x et des y. Mais ces courbes sont les projections, sur le plan des xy, des sections de F_6 par des plans parallèles à celui des xy. Les points fixes communs à toutes ces courbes sont les traces d'autant de droites parallèles à l'axe des z et situées tout entières sur F_6, et le parallélogramme commun à deux de ces courbes est la projection d'un parallélipipède parallèle aux axes coordonnés et inscrit dans la surface (pour abréger, nous appellerons cette figure un parallélipipède inscrit).

Ainsi, *toute surface* F_6 *spéciale possède quatre droites par chaque point quadruple, outre les droites joignant ces points qua-*

druples, et est circonscrite à une double infinité de parallélipipèdes.

On démontre sans peine que les centres de ces parallélipipèdes décrivent une surface cubique ayant les droites à l'infini des plans coordonnés pour droites simples et les points à l'infini des axes pour points doubles, c'est-à-dire une surface cubique comme celle qui est étudiée au numéro précédent.

Il est évident aussi que chaque section parallèle aux xy possède un parallélogramme *caractéristique*, limite du parallélipipède compris entre cette section et la section parallèle infiniment voisine.

35. Voyons à présent la surface F_6 générale représentée par une équation du sixième degré, où chaque variable ne figure qu'à la première et la deuxième puissance.

Supposons z constant; la section correspondante de la surface F_6 est une quartique binodale représentée par une équation de la forme

$$y^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + y(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma') + (\alpha'' x^2 + \beta'' x + \gamma'') = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions quadratiques de z; pour que la section soit quadrillée, il faut que l'on ait

$$(\alpha\beta'\gamma'') = 0.$$

Cette relation détermine en général six valeurs de z.

Par chaque droite d'une surface F_6 *générale, il n'y a que six sections quadrillées.*

Ordonnons F_6 par rapport à z :

$$z^2\varphi + z\psi + \chi = 0,$$

φ, ψ, χ représentent des quartiques binodales à nœuds coïncidents; dans le cas le plus général, ces trois courbes n'ont pas d'autres points communs que leurs nœuds.

Par chaque point quadruple d'une surface F_6 *générale, il ne passe d'autres droites situées sur la surface que celles qui sont menées aux autres points quadruples.*

La surface n'a pas davantage de parallélipipède inscrit, car il faudrait que, pour deux valeurs z_1 et z_2 de z, les sections soient quadrillées et admettent un parallélogramme inscrit commun, ce qui, d'après le n° 15, exige quatre conditions et l'on ne dispose que des deux inconnues z_1 et z_2.

36. Il est bien clair que l'existence des trois quaternes de lignes droites par les points quadruples et des ∞^2 parallélipipèdes inscrits, quoique nécessaire pour que l'équation d'une surface F_6 prenne la forme d'un déterminant, constitue un ensemble surabondant de conditions, et qu'une partie d'entre elles implique les autres. On peut probablement donner plus d'un système irréductible de conditions. Nous allons en indiquer un et montrer en même temps la marche à suivre pour vérifier si ces conditions sont satisfaites et pour former le déterminant. Remarquons en passant que, contrairement à ce qui arrive dans le plan, l'existence d'un parallélipipède inscrit n'entraine pas celle de tous les autres, comme on le prouve facilement.

Pour que la surface F_6 *soit spéciale, il faut et il suffit que trois sections quelconques parallèles à un même plan coordonné, projetées sur ce plan, soient trois quartiques binodales ayant quatre points communs et appartenant à un même réseau dont deux éléments quelconques se coupent encore aux sommets d'un parallélogramme inscrit.*

Voilà ce que nous allons établir.

Nous savons déjà que ces conditions sont nécessaires; pour voir si elles sont suffisantes, supposons que les trois sections aient été faites par les plans $z = h$, $z = h'$, $z = h''$; les équations des trois courbes d'intersection peuvent (n° 15) se ramener aux formes

$$h^2\varphi + h\psi + \chi \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x'^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$h'^2\varphi + h'\psi + \chi \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$h''^2\varphi + h''\psi + \chi \equiv \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme le déterminant $| h^2 \; h \; 1 |$ n'est pas nul, si les quantités h, h', h'' sont différentes, on peut tirer de là φ, ψ, χ sous forme de déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix};$$

par suite $z^2\varphi + z\psi + \chi$ est égal à un déterminant dont les éléments des trois lignes sont des fonctions quadratiques, respectivement en z, en x et en y, ce qu'il fallait obtenir.

Si l'on a donc une certaine fonction F_6 contenant x, y, z au premier et au second degré, et si l'on veut, à la fois s'assurer que la transformation en déterminant est possible et effectuer cette transformation, on suivra la marche que voici :

On prend trois sections planes quelconques parallèles à un des plans coordonnés, celui des xy par exemple. On choisit les sections dont les équations sont les plus simples ; généralement, le plus facile est de prendre directement les fonctions φ, ψ χ qui multiplient les puissances de z ; elles correspondent respectivement, χ à la section par le plan xy, ψ à la section infiniment voisine, φ à la section $z = \infty$, c'est-à-dire au cylindre tangent à la surface F_6 en son point quadruple à l'infini sur l'axe des z.

Pour plus de généralité, supposons ces sections faites par les plans $z = h$, $z = h'$, $z = h''$ et posons

$$h^2\varphi + h\psi + \chi \equiv y^2(a_1x^2 + 2b_1x + c_1) + 2y(a_2x^2 + 2b_2x + c_2) + (a_3x^2 + 2b_3x + c_3);$$

pour les deux autres sections, remplaçons a, b, c par a', b', c', puis par a'', b'', c''.

On s'assure d'abord que les déterminants $\Delta \equiv (abc)$ et $\Delta' \equiv (a'b'c')$

sont nuls; ce sont deux premières conditions. On forme alors (voir n° 13) les équations

$$(a'bc)x^2 + 2(b'bc)x + (c'bc) = 0,$$
$$(ab'c')x^2 + 2(bb'c')x + (cb'c') = 0;$$

on s'assure qu'elles sont identiques, ce qui donne deux nouvelles conditions; on représente alors l'une ou l'autre de ces équations par $a_x^2 = 0$, et l'on a un couple de côtés opposés du parallélogramme commun aux deux premières sections; on détermine de même l'autre couple de côtés opposés $b_y^2 = 0$, mais ceci n'exige plus de nouvelle condition.

Ensuite, on ramène, par la méthode des coefficients indéterminés, $h^2\varphi + h\psi + \chi$ et $h'^2\varphi + h'\psi + \chi$ aux formes

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & a_x'^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y''^2 \end{vmatrix}.$$

Après quoi, il faut identifier $h''^2\varphi + h''\psi + \chi$ à

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ a_x^2 & a_x'^2 & a_x''^2 \\ b_y^2 & b_y'^2 & b_y''^2 \end{vmatrix}.$$

Pour cette identification, on dispose de trois coefficients λ, μ, ν qui entrent linéairement dans neuf équations; trois d'entre elles donnent λ, μ, ν et ces valeurs doivent vérifier les six autres équations. Jointes aux quatre précédentes, ces six dernières conditions forment le système des dix conditions nécessaires et suffisantes auquel est arrivé M. Massau, qui a résolu le problème actuel par identification directe.

Enfin, il reste à résoudre, par rapport à φ, ψ et χ, les trois égalités

$$h^2\varphi + h\psi + \chi = a_x^2 b_y'^2 - a_x'^2 b_y^2,$$
$$h'^2\varphi + h'\psi + \chi = a_x^2 b_y''^2 - a_x''^2 b_y^2,$$
$$h''^2\varphi + h''\psi + \chi = \lambda(a_x'^2 b_y''^2 - a_x''^2 b_y'^2) - \mu(a_x^2 b_y''^2 - a_x''^2 b_y^2) + \nu(a_x^2 b_y'^2 - a_x'^2 b_y^2).$$

Cette résolution est toute faite si l'on a pris φ, ψ et χ pour les troissections; la substitution des valeurs trouvées pour φ, ψ, χ dans la fonction $z^2\varphi + z\psi + \chi$ achève la transformation.

Une remarque faite au n° 15 permet de réduire théoriquement l'énoncé des conditions auxquelles doit satisfaire la fonction F_6 générale, mais paraît sans utilité pour le calcul pratique.

Au reste, voici l'énoncé réduit auquel conduit cette remarque :

Pour que la surface F_6 *soit représentable par un déterminant, il faut et il suffit que trois sections quelconques parallèles à l'un des plans coordonnés, projetées sur ce plan, aient quatre points communs à distance finie et que l'une de ces trois courbes coupe encore chacune des autres aux sommets d'un parallélogramme inscrit.*

37. Il peut y avoir quelque intérêt à traiter un exemple numérique. Soit la fonction

$$\begin{aligned} z^2\varphi + z\psi + \chi \equiv{}& z^2[y^2(x^2 + 3x + 9) + 5x^2 + 9x + 17] \\ &+ z[-4y^2 + 2y(x^2 - 5) + 4x^2 - 32] \\ &- 2[y^2(x^2 + 3x + 5) + 2y(2x^2 + 3x + 4) + 13x^2 + 21x + 29]. \end{aligned}$$

Considérons les formes φ et ψ; leurs déterminants

$$\Delta \equiv (abc) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}, \qquad \Delta' \equiv (a'b'c') \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -32 \end{vmatrix}$$

sont nuls. Ensuite, comme les coefficients b'_i font défaut, on n'obtiendrait rien en formant les déterminants tels que $(ab'c')$; on prend donc nécessairement les équations

$$\begin{aligned} (aa'c')x^2 + (ba'c')x + (ca'c') &= 0, \\ (a'ac)x^2 + (b'ac)x + (c'ac) &= 0, \end{aligned}$$

qui sont identiques, car elles sont, dans l'exemple choisi,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -32 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 9 & 4 & -32 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 17 & 4 & -32 \end{vmatrix} \equiv 8(x^2 - 3) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 17 \end{vmatrix} x^2 + 0x + \begin{vmatrix} -4 & 1 & 9 \\ -5 & 0 & 0 \\ -32 & 5 & 17 \end{vmatrix} \equiv -28(x^2 - 5) \equiv 0.$$

En changeant les lignes en colonnes dans l'un de ces calculs seulement, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -32 \end{vmatrix} y^2 + 0y + \begin{vmatrix} 5 & 9 & 17 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -32 \end{vmatrix} \equiv -56(y^2 + 3) \equiv 0.$$

Le parallélogramme inscrit dans les courbes φ et ψ est donc déterminé; ses couples de côtés opposés ont pour équations $x^2 - 5 = 0$, $y^2 + 3 = 0$; on pose alors

$$k(x^2 + 3x + 9) + (5x^2 + 9x + 17) \equiv l(x^2 - 5),$$

d'où $k \equiv -3$, $l \equiv 2$ et, par suite,

$$\varphi \equiv y^2(x^2+3x+9) + 3(x^2+3x+9) + 2(x^2-5) \equiv \begin{vmatrix} x^2+3x+9 & x^2-5 \\ -2 & y^2+3 \end{vmatrix}.$$

On trouve de même pour ψ,

$$\psi \equiv \begin{vmatrix} x^2 - 5 & 4 \\ y^2 + 3 & 2y + 4 \end{vmatrix}.$$

Posons ensuite

$$\chi \equiv \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 4 & x^2 + 3x + 9 & x^2 - 5 \\ 2y + 4 & -2 & y^2 + 3 \end{vmatrix}$$

$$\equiv -2y^2(x^2 + 3x + 5) + 2y(2x^2 + 3x + 4) + 13x^2 + 21x + 29.$$

On voit immédiatement que, pour

$$\lambda \equiv -2, \quad 2\mu - 2\nu \equiv -8, \quad 7\lambda - 32\mu - 44\nu \equiv -58,$$

donc pour $\lambda = \mu = -2$, $\nu = 2$, l'identité est satisfaite et que l'on a

$$z^2\varphi + z\psi + \chi \equiv \begin{vmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 4 & x^2+3x+9 & x^2-5 \\ 2y+4 & -2 & y^2+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & z & 0 \\ 4 & x^2+3x+9 & x^2-5 \\ 2y+4 & -2 & y^2+3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 4 & x^2+3x+9 & x^2-5 \\ 2y+4 & -2 & y^2+3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} z^2-2 & z-2 & 2 \\ 4 & x^2+3x+9 & x^2-5 \\ 2y+4 & -2 & y^2+3 \end{vmatrix};$$

ainsi la transformation est opérée.

38. Nous terminerons par quelques mots relatifs aux trois quaternes de droites situées sur la surface F_6 spéciale et passant par les trois points quadruples.

D'après la remarque qui termine le n° 15, les traces des quatre droites parallèles à Oz, sur le plan des xy (donc aussi ces droites elles-mêmes), peuvent être représentées d'une seule manière par la formule

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y'^2 & b_y'^2 & c_y'^2 \end{matrix} \right\| = 0,$$

où l'on se donne à volonté les éléments de la première ligne; de même les droites parallèles à Oy se représentent par

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_z'^2 & b_z'^2 & c_z'^2 \end{matrix} \right\| = 0,$$

et, par suite, le troisième quaterne de droites est donné par

$$\left\| \begin{matrix} a_y'^2 & b_y'^2 & c_y'^2 \\ a_z'^2 & b_z'^2 & c_z'^2 \end{matrix} \right\| = 0$$

et ne dépend que des deux autres quaternes; d'où ce théorème dû à M. Massau : *Deux quaternes de droites de la surface spéciale* F_6 *déterminent le troisième.*

Soient à présent d_1, d_2, d_3, d_4 les droites de F_6 parallèles à Ox, et d_1', d_2', d_3', d_4' leurs projections sur le plan xz; soient

B_1, B_2, B_3, B_4 les traces sur xz des droites de F_6 parallèles à Oy.

La section de F_6 parallèle au plan xz et menée par une des droites d_i se complète par une cubique plane c_i dont la projection c'_i sur un plan xz passe par B_1, B_2, B_3, B_4 et possède un point double à l'infini sur Oz et un point simple à l'infini sur Ox.

Les systèmes $(c'_1 + d'_1)$ et $(c'_2 + d'_2)$ par exemple sont des cas particuliers de deux quartiques binodales quadrillées qui doivent avoir un parallélogramme inscrit commun; donc, si c'_1 coupe d'_2 en M et N et si c'_2 coupe d'_1 en P et Q, MNPQ est un parallélogramme parallèle à Ox et Oz.

Toutes les cubiques qui passent par B_1, B_2, B_3, B_4 et qui ont un point double à l'infini sur Oz et un point simple à l'infini sur Ox, ont au total huit points fixes et forment un faisceau (c'); elles découpent donc sur d'_1 et d'_2 deux involutions quadratiques I_1 et I_2. Projetons sur d'_1 l'involution I_2 par des droites parallèles à Oz; nous obtenons une troisième involution I_3 sur d'_1; les involutions I_1 et I_3 sont sur le même support et ont un couple commun P, Q; ces deux points achèvent de déterminer la cubique c'_2 et par suite la cubique c_2; une construction analogue donne les cubiques c_1, c_3, c_4.

Remarquons que l'involution I_1 (ou I_2) est déterminée par deux couples; il suffit donc, pour la construire, de prendre deux cubiques du faisceau (c'); le plus simple est de choisir deux courbes dégénérées de ce faisceau, par exemple le système formé de la parallèle à Oz par B_1 avec l'hyperbole à asymptotes parallèles à Ox et Oz passant par B_2, B_3, B_4, et le système analogue obtenu en intervertissant les rôles entre B_1 et B_2.

On peut aussi intervertir les rôles entre les droites parallèles à Ox et celles qui sont parallèles à Oy; de sorte que, par des constructions très simples, huit sections planes de F_6 se déduisent de la connaissance de deux quaternes de droites.

Mais il y a plus : la section parallèle au plan xy et menée par la droite d_1 est aussi déterminée surabondamment, puisque l'on peut construire les points où elle coupe les cubiques c_2, c_3, c_4; il en est de même des sections parallèles par d_2, d_3, d_4 (et même

de toute section parallèle à xy). Deux de ces sections, par exemple celles qui contiennent d_1 et d_2 projetées sur le plan des xy se coupent en quatre points à distance finie; ce sont les traces du dernier quaterne de droites parallèles à Oz.

La détermination de ces points dépend donc de l'intersection de deux cubiques ayant en commun un point double à l'infini sur Oy et un point simple à l'infini sur Ox; or ce problème, on le sait, peut se ramener à une intersection de coniques.

STRUCTURE ANATOMIQUE

DU

PÉRICARPE ET DU SPERMODERME

CHEZ LES

RENONCULACÉES

—

RECHERCHES COMPLÉMENTAIRES

PAR

Hyac. LONAY

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

AVANT-PROPOS

A la suite de la publication d'un précédent travail sur la structure des péricarpes et spermodermes des Renonculacées [1], je résolus de rassembler et d'étudier les matériaux se rapportant aux mêmes parties des quelques espèces rares ou critiques de cette famille de plantes que je n'avais pas eu l'occasion d'examiner dans ce premier mémoire. Évidemment, il en est encore quelques-unes qui manquent à l'appel. Néanmoins, j'ai cru ne pas devoir différer plus longtemps l'impression des notes que j'ai rassemblées, me réservant d'ailleurs d'y revenir quand les circonstances voudront bien s'y prêter.

Il m'a semblé convenable de conserver pour cet exposé une rédaction analogue à celle que j'avais employée dans le travail susmentionné, ce qui rendra plus facile la comparaison des caractères entre eux. Enfin, l'ordre dans lequel les espèces sont traitées correspond entièrement à celui qui fut adopté dans ce même travail.

---

[1] Hyacinthe Lonay, *Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Structure des péricarpes et des spermodermes.* (Mémoires de la Soc. Roy. des Sciences de Liége, 3e sér., t III [1900], et Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége, vol. III.)

En raison, précisément, de la rareté de la plupart des matériaux qui ont passé par mes mains dans ces conjonctures, j'ai étendu quelque peu le champ de mes observations en dehors des limites où semblait devoir me confiner le titre sous lequel j'ai rassemblé ces notes : j'ai contrôlé, en ce qui les concerne, les données de la morphologie externe et de la taxonomie qui en est la conséquence, et j'ai été amené à formuler certaines propositions qui ne font d'ailleurs que confirmer l'opinion de botanistes éminents sur la place à assigner à plusieurs des espèces étudiées.

Liége, Institut botanique, octobre 1906.

STRUCTURE ANATOMIQUE

DU

PÉRICARPE ET DU SPERMODERME

CHEZ LES

RENONCULACÉES

—

RECHERCHES COMPLÉMENTAIRES

GENRE RANUNCULUS

R. AMPLEXICAULIS L.

J'ai eu l'occasion de signaler autrefois (1) la structure des parois de l'ovaire et du tégument de cette espèce au stade de la fleur épanouie. Je n'avais pu obtenir de fruits mûrs à cette époque; il me fut donc impossible de donner des renseignements sur l'anatomie de ces derniers Je puis actuellement combler cette lacune.

Péricarpe mûr.

Ep. e (2) à cellules larges tabulaires, à paroi externe très épaisse; stomates rares; pas de poils.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 70.

(2) Pour la signification de ces abréviations, voir *op. cit.* pp. 12 et 17.

Tf. e. à une ou deux assises de cellules parenchymateuses.

Tf. m. à une assise de cellules non cristalligènes, plus ou moins sclérifiées par places.

Tf. i. présentant de cinq à huit assises de cellules fortement sclérifiées, dont l'ensemble forme des saillies vers l'extérieur (fig. 2 : coupe transversale d'un akène mûr; dessin d'ensemble).

Ep. i. à cellules sclérifiées, allongées tangentiellement.

Faisceaux : Ils sont au nombre de neuf : L *i' i i'* M *i' i i'* L, reliés les uns aux autres par quelques anastomoses (fig. 2).

Spermoderme mûr.

Le spermoderme est formé uniquement par le tégument (fig. 3 : coupe transversale dans le spermoderme mûr).

Tégument : *Ep. e. T.* à cellules tabulaires, larges, à paroi externe assez épaisse.

Tf. T. à quatre assises de cellules aplaties, à parois minces.

Ep. i. T. à cellules tabulaires présentant des épaississements frangés assez larges.

Albumen à cellules à parois épaisses, cellulosiques.

Remarque. — L'absence de cristaux dans le *Tf. m.* du péricarpe, l'existence d'assises distinctes pour ce *Tf. m.* et pour le *Tf. e.* du péricarpe, le nombre relativement élevé des assises cellulaires composant de *Tf. i.* ainsi que d'ailleurs l'ensemble des caractères fournis par le spermoderme concourent à placer le *R. amplexicaulis* dans le voisinage du *R. platanifolius*, ce qui corrobore les données de la morphologie externe de ces plantes. Toutefois l'espèce en cause se distingue de cette dernière par un caractère important : le nombre particulièrement grand des faisceaux qui parcourent le péricarpe. Entre les vingt-deux espèces que j'ai examinées autrefois, une seule, le *R. arvensis*, présente une vingtaine de faisceaux, deux en ont cinq (*R. nemorosus* et *R. Steveni*); les autres n'atteignent pas ce nombre et, parmi elles, le *R. platanifolius* en compte trois, ce qui est le cas le plus général.

R. HEDERACEUS L.

Au stade de la fleur épanouie, les parois de l'ovaire et l'ovule ont absolument les mêmes structures chez cette espèce et la suivante, que celles que j'ai déjà eu l'occasion de décrire pour les parties correspondantes du *R. divaricatus*. Je puis donc me borner à prier le lecteur de se reporter à ces descriptions (1) et à donner ici les caractères des spermodermes et des péricarpes mûrs de ces deux espèces.

Péricarpe mûr.

Ep. e. à cellules plus ou moins isodiamétriques, à paroi externe épaisse revêtue d'une cuticule mince, formant une assise se détachant facilement (fig. 1 : coupe transversale de l'akène).

Tf. e. à trois assises de cellules assez grandes, parenchymateuses, celles de l'assise externe au moins deux fois plus larges que les autres, laissant entre elles et l'*Ep. e.* des méats assez étendus dans le sens tangentiel.

Tf. m. à une assise de cellules petites, polygonales, à parois minces, sans méats, non cristalligènes.

Tf. i. à trois assises de cellules polygonales, allongées longitudinalement, à parois très épaisses, sclérifiées, abondamment ponctuées. Le *Tf. i.* forme une couche dont l'ensemble produit des ondulations vers l'extérieur.

Ep. i. à cellules sclérifiées, ponctuées, allongées tangentiellement.

Faisceaux au nombre de deux.

Spermoderme.

Le spermoderme est formé aux dépens du tégument et du nucelle.

---

(1) *Loc. cit.*, pp. 70 et 73.

Tégument : *Ep. e. T.* à cellules tabulaires écrasées, à paroi externe légèrement épaissie.

Tf. T. à deux assises de cellules à parois minces, fortement écrasées.

Ep. i. T. à cellules tabulaires, presque isodiamétriques, à paroi interne pourvue d'épaississements frangés atteignant le tiers de la hauteur des cellules.

Nucelle : *Ep. N.* à cellules cubiques, à parois minces, écrasées.

Tf. N. écrasé formant une lame nacrée.

Albumen aleurique, à cellules ayant des parois plutôt minces.

Remarque. — Ces caractères rapprochent cette espèce du *R. divaricatus*. Elle en diffère surtout par la nature du *Tf. m.* du péricarpe et par le nombre d'assises du *Tf. i.* du même organe.

R. FLUITANS Lam.

Bien que les fruits que j'ai eu l'occasion d'observer ne fussent pas complètement mûrs, tous les tissus, sauf l'*Ep. i. T.*, étaient suffisamment différenciés pour en déduire les caractères suivants :

Péricarpe mûr.

Ep. e. à cellules allongées longitudinalement, à parois toutes minces.

Tf. e. à deux assises de cellules parenchymateuses.

Tf. m. formé d'une assise de cellules non cristalligènes.

Tf. i. à quatre assises de cellules sclérifiées.

Ep. i. à cellules sclérifiées allongées tangentiellement.

Faisceaux au nombre de deux.

Spermoderme mûr.

Ce spermoderme est entièrement semblable à celui du *R. divaricatus*, réserves faites quant aux caractères fournis par l'*Ep. i. T.*, dont les franges n'étaient pas encore visibles.

Ce n'est donc que par le nombre des assises cellulaires du *Tf. i.* du péricarpe que cette espèce diffère du *R. divaricatus*, où il était de deux.

GENRE TRAUTVETTERIA

T. PALMATA Fisch. et Mey.

Chaque carpelle renferme un seul ovule anatrope, unitégumenté, dressé et à raphé ventral (fig. 13 : coupe longitudinale d'un carpelle d'une fleur épanouie; dessin d'ensemble).

Péricarpe.

Structure des parois de l'ovaire dans la fleur épanouie.

Cinq assises cellulaires dont chacune représente une des régions du péricarpe : *Ep. e.*, *Tf. e.*, *Tf. m.*, *Tf. i.*, *Ep. i.* Des stomates existent à l'*Ep. e.* (fig. 14 : coupe transversale de la paroi latérale d'un ovaire de fleur épanouie).

Structure du péricarpe à la maturité.

Le nombre des assises cellulaires n'a pas changé (fig. 17 : coupe transversale dans le péricarpe d'un akène mûr).

Ep. e. à cellules à peu près isodiamétriques, assez grandes; à paroi externe peu épaisse, les autres minces; vues de face par l'extérieur, elles présentent des contours sinueux; des stomates; pas de poils.

Tf homogène, formant un parenchyme méatique.

Ep. i. à cellules sclérifiées, allongées longitudinalement, à contours sinueux (fig. 18 : une cellule de l'*Ep. i.* vue de face).

Faisceaux : Cinq faisceaux libéroligneux entourés d'une gaine de cellules sclérifiées (fig. 16 : coupe transversale dans un akène mûr; dessin d'ensemble).

Bien que monosperme, le fruit est déhiscent.

Spermoderme.

Structure de l'ovule dans la fleur épanouie.

Tégument unique à six assises de cellules et formant un canal micropylien très long (fig. 15 : coupe longitudinale dans un ovule de fleur épanouie).

Nucelle : *Ep. N.* double au sommet.

Tf. N. à un assise persistant au sommet. Sac embryonnaire assez grand.

Spermoderme de la graine mûre.

Le spermoderme est uniquement formé par le tégument (fig. 19 : coupe transversale du spermoderme mûr).

Tégument : *Ep. e. T.* à cellules isodiamétriques, assez grandes, affaisées, à paroi externe assez épaisse.

Tf. T. à cinq assises de cellules parenchymateuses, méatiques, dont les trois internes sont fortement écrasées et formées de cellules plus petites.

Ep. i. T. à cellules tabulaires, à paroi interne épaissie, sans franges.

Albumen aleurique.

Bien que je ne me sois pas donné pour mission d'examiner la constitution des embryons, je ne puis me passer de profiter de la coupe représentée à la figure 16 pour faire remarquer que dans le *Trautvetteria* le plan des cotylédons ne coïncide pas avec le plan de symétrie de la graine; il fait souvent avec lui un angle de près de 30°. Une disposition analogue a été décrite chez les Calycanthées (1).

---

(1) O. Lignier, *La graine et le fruit des Calycanthées*. (Bull. de la Soc. linn. de Normandie, 4e sér., vol. V, 1891.)

Note critique.

Tous ces caractères trahissent l'étroite affinité qui unit le genre *Trautvetteria* au genre *Oxygraphis* (1); l'analogie est aussi grande dans les péricarpes que dans les spermodermes de ces deux espèces. Dans les péricarpes, n'était l'existence de trois assises cellulaires au lieu de deux à *Tf.* et de cinq faisceaux au lieu de treize à quinze, les détails de structure sont identiques et, de plus, on a affaire, de part et d'autre, avec des fruits monospermes déhiscents. Dans les spermodermes, la constitution fondamentale est la même; les différences sont des plus secondaires et consistent pour le *Trautvetteria* en ce que le tégument comprend une assise de plus, l'*Ep. N.* est double au sommet au lieu d'être simple, le *Tf. N.* persiste en une assise au sommet de l'ovule adulte au lieu de se résorber, l'*Ep. e. T.* du spermoderme mûr est formé de cellules isodiamétriques et non tabulaires, toutes les assises du *Tf. T.*, au lieu d'une seule, sont persistantes, ce qui rend le spermoderme de *Trautvetteria palmata* plus épais que celui de l'*O. Cymbalariae.*

Si l'on se rapporte à ce qui se passe chez les espèces d'autres genres, du *Ranunculus* notamment, on reconnaîtra qu'il y a lieu de dire que ces différences sont tout au plus spécifiques.

Le *Trautvetteria palmata* est, parmi les Renonculacées, une de celles dont la place a été le plus sujette à controverses. Mise d'abord au nombre des *Cimicifuga* (2), elle fut incorporée, en même temps que toutes les espèces de ce genre, dans le genre *Actaea* par De Candolle (3). Fischer et Meyer (4) lui recon-

---

(1) Cf. H. Lonay, *loc. cit.*, p. 79.

(2) Michaux, *Flora boreali americana.* Paris, 1803, t. I, p. 316, et *Botanical Magazine*, pl. 1630.

(3) A.-P. De Candolle, *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis*, t. I, p. 64.

(4) Fischer et Meyer, *Animadversiones botanicae* (Ann. des Sciences nat. bot., 2e sér., t. IV, p. 333), et *Linnaea*, t. X, 1835. Littérat., p. 79.

nurent des caractères tels qu'ils en firent un genre à part sur la place duquel ils ne voulurent pas se prononcer catégoriquement, mais où ils trouvèrent une certaine analogie avec les *Ranunculus*. Enfin, Prantl (1) lui assigna la place qui lui revient, immédiatement après le genre *Oxygraphis*, en se demandant s'il ne conviendrait pas plutôt de l'y incorporer.

Certes, la stature de la plante, bien autrement développée que celle des *Oxygraphis*, ses fleurs en corymbes, sans pétales, à étamines longues et nombreuses la différencient nettement des *Oxygraphis* et lui donnent même une ressemblance extérieure avec les *Thalictrum*. Mais on rencontre souvent de ces différences entre diverses espèces d'autres genres, tels que *Ranunculus* et *Anemone*. Et l'étroite analogie des caractères fournis par les organes séminaux, péricarpes et spermodermes, chez l'*Oxygraphis* et le *Trautvetteria*, est de nature à confirmer le doute exprimé par Prantl au sujet de la valeur générique de cette dernière espèce.

GENRE CALLIANTHEMUM

C. RUTIFOLIUM C.-A. Mey.

Par suite de la pénurie des matériaux dont je disposais, j'ai dû m'adresser à deux espèces différentes pour étudier les organes séminaux à l'état adulte et à l'état de maturité. Le premier de ces stades a été observé dans la fleur épanouie du *C. kernerianum* Fryn., tandis que les akènes, peu avant leur maturité et ceux complètement mûrs, provenaient du *C. rutifolium* C. A. Mey.

Chaque carpelle ne possède qu'un seul ovule anatrope, bitégumenté, pendant et à raphé ventral; cet ovule est, en outre, accompagné d'ovules rudimentaires se présentant sous forme de

(1) Engler und Prantl, *Die nat. Pflanzenfamilien*, III. Teil, 2. Abt., p. 64.

mamelons peu développés (fig. 4 : coupe longitudinale d'un carpelle d'une fleur épanouie ; dessin d'ensemble).

Péricarpe.

Structure de l'ovaire dans la fleur épanouie.

On y trouve environ neuf assises de cellules ; des stomates à l'*Ep. e.* ; pas de poils.

Structure du péricarpe à la maturité.

Quinze assises de cellules en moyenne (fig. 6 et 7 : coupe transversale dans le péricarpe peu de temps avant la maturité).

Ep. e. à cellules isodiamétriques, à parois externe et interne fortement épaissies ; cuticule mince ; des stomates ; pas de poils (fig. 8 : *Ep. e.* du péricarpe vu de face).

Tf. comprenant trois régions :

Tf. e. à environ sept assises de cellules parenchymateuses, vides et complètement écrasées à la maturité, mais avant cela, abondamment pourvues d'amidon ;

Tf. m. consistant en une assise de cellules en général plus petites, à parois minces ;

Tf. i. formant un sclérenchyme à cinq assises de cellules assez grandes, sans contenu, à parois épaisses.

Ep. i. à cellules sclérifiées, à parois épaisses, plus ou moins allongées tangentiellement.

Faisceaux en nombre pair, communément seize, reliés par des anastomoses obliques qui restent localisées dans le *Tf. m.* Le faisceau apposé au faisceau médian (M) du carpelle est très large. C'est lui qui fournit à l'ovule le faisceau du raphé (R) (fig. 9 : coupe transversale d'un akène peu de temps avant la maturité ; dessin d'ensemble).

Spermoderme.

Structure de l'ovule dans la fleur épanouie.

Les *Callianthemum* ou tout au moins le *C. kernerianum* présente au-dessus de l'ovule principal deux ou trois mamelons

surmontant la cavité ovarienne (fig. 4, *rud.*) auxquels doit être attribuée la valeur d'ovules arrêtés dès le début dans leur développement. Ces rudiments d'ovules sont bien moins marqués que chez les *Adonis* et à plus forte raison que chez les *Clematis* (1).

L'ovule principal présente l'organisation qui suit :

Primine à six assises de cellules.

Secondine à deux assises cellulaires.

Nucelle : *Ep. N.* triple au sommet en dessous duquel le *Tf. N.* est résorbé.

Spermoderme de la graine mûre.

Dans la graine extraite d'un akène sec, les tissus du spermoderme sont fortement écrasés et, à part l'*Ep. e. P.*, ils gonflent trop imparfaitement au moyen des réactifs pour faire réapparaître leur structure primitive (fig. 11 : coupe transversale du spermoderme mûr faite à sec et modérément traitée par la potasse à chaud) (2). Pour observer celle-ci, il faut disséquer une graine d'un akène fraîchement récolté.

Le spermoderme est formé aux dépens de la primine, de la secondine et du nucelle (fig. 10 : coupe transversale du spermoderme presque mûr).

Primine : *Ep. e. P.* à cellules isodiamétriques, à paroi externe épaisse et bombée vers l'extérieur (fig. 10 et 11 et fig. 12 : *Ep. e. P.* d'une graine mûre, vu de face).

Tf. P. à sept assises de cellules grandes, parenchymateuses, les internes déjà écrasées.

Ep. i. P. à cellules à parois minces écrasées.

Secondine : *Ep. e. S.* à cellules semblables aux précédentes.

Ep. i. S. à cellules tabulaires, à paroi interne un peu épaissie, ne présentant pas de franges d'épaississement.

---

(1) *Loc. cit.* Cf. fig. 257, pl. XVIII, et fig. 71, pl. VI.

(2) C'est cette réaction qui a donné les moins mauvais résultats.

Nucelle : *Ep. N.* à cellules cubiques assez grandes, à parois minces.

Tf. N. à une ou deux assises persistantes de cellules à parois minces, écrasées.

Note critique.

On conviendra sans peine que tous ces caractères offrent une singulière ressemblance avec ceux des parties correspondantes des *Adonis* (1). La principale différence porte sur le sens dans lequel se fait l'anatropie de l'ovule. Les autres, tout à fait secondaires, consistent surtout, pour le *Callianthemum*, dans l'absence de poils à l'*Ep. e.* du péricarpe — encore celle-ci se constate-t-elle aussi chez l'*Adonis aestivalis* — ; dans l'*Ep. e. P.* coloré en brun et dont les cellules sont fortement bombées vers l'extérieur et enfin dans la persistance du *Tf. N.*

De ces faits, il résulte, semble-t-il, que ce genre doit être rangé à côté des *Adonis* dans ce que j'ai nommé la tribu des Thalictrées (2).

Y a-t-il lieu de s'arrêter au caractère énoncé par Prantl (3) de la manière suivante : « une graine se détachant latéralement de la suture ventrale » ? Je pense que non. Pour cet auteur, ce caractère acquiert une énorme importance, puisque c'est là ce qui l'amène à jeter le genre *Callianthemum* au milieu de sa tribu des Helléborées, trop vaste à mon avis. Au surplus, il est tout aussi admissible pour une foule d'autres plantes que les akènes constituant leurs fruits ne sont que des fruits polyspermes et déhiscents arrêtés dans leur développement. Il suffit, pour s'en convaincre, de signaler non seulement pas mal d'autres Renonculacées, mais les Crucifères et les Papilionacées notamment, où l'on peut assister, en quelque sorte, à la réduction des siliques et des gousses à l'état d'akènes, chez les *Crambe*, les

---

(1) Cf. *loc. cit.*, p. 85.
(2) *Loc. cit.*, p. 128.
(3) Engler und Prantl, *Die nat. Pflanzenfamilien*, III. Teil, 2. Abt., p. 56.

Onobrychis, les *Trifolium*, etc., en passant par des genres à espèces oligospermes.

Quoi qu'il en soit, Prantl verse dans une profonde erreur; car de même que nous l'avons signalé dans les genres *Ranunculus*, *Thalictrum* et *Clematis* (1), c'est en dessous du niveau où la suture ventrale se manifeste qu'est inséré l'ovule. Comme dans ces genres, il est attaché sur le bord ventral interne de l'espèce de cupule qui résulte de l'invagination du mamelon carpellaire, bord qui s'étend dans le sens horizontal. Qu'il soit inséré plus ou moins en dehors du plan dorso-ventral du carpelle, il n'y a pas à le contester; mais cela n'implique nullement qu'il surgisse d'un des bords longitudinaux de la suture ventrale formée par le limbe carpellaire replié, comme semble l'admettre Prantl.

De son côté, Baillon (2) affirme que les carpelles de *Callianthemum* renferment primitivement deux ovules apparaissant côte à côte. J'ai vainement recherché le fait dans le *C. kernerianum* en suivant l'organogénie de ses carpelles, et n'ai retrouvé aucune trace de l'existence d'un second ovule *à côté* de l'ovule principal, trace qui eût dû être aperçue à coup sûr par la méthode des coupes successives que j'ai appliquée à mes observations sur l'akène presque mûr du *C. rutifolium*.

Il ne reste donc rien des raisons invoquées pour éloigner les *Callianthemum* des *Adonis*, et leur place se trouve à côté de ces derniers dans la tribu des Thalictrées. Cette manière de voir est d'ailleurs partagée par Baillon lui-même (3) et surtout par Bentham et Hooker (4), et plusieurs autres auteurs qui rangent ces genres à côté l'un de l'autre dans leurs *Genera* et *Species*. Mais, chose curieuse, c'est que De Candolle, tout en désignant le *C. rutifolium* comme une espèce du genre *Ranunculus* (*R. rutaefolius* L.), lui trouve une analogie avec les *Thalictrum*

---

(1) H. Lonay, *loc. cit.*, pp. 11, 23 et 30.
(2) H. Baillon, *Histoire des plantes*, t. I, p. 50.
(3) Idem, *loc. cit.*
(4) Bentham et Hooker, *Genera Plantarum*, 1862, t. I, p. 5.

quand il dit : *folia juniora lobis intus* (*ut in Thalictris*) *replicatis* (1). Cette circonstance ne peut que favoriser le rapprochement de cette espèce auprès des *Thalictrum*.

GENRE XANTHORRHIZA

X. APIIFOLIA L'Hér.

Nous n'entrerons pas dans de trop longs détails au sujet de l'organogénie du fruit si curieux de cette espèce. Il suffira de savoir qu'après la fécondation, les carpelles biovulés subissent dans la partie inférieure de leur région ventrale un accroissement relativement beaucoup plus considérable que dans les autres régions. Les ovules suspendus à la limite supérieure de cette zone d'accroissement sont de ce fait reportés tout au-dessus de la cavité ovarienne, tandis que le prolongement styliforme occupe à peu près le centre de la face dorsale du fruit.

On peut dire que chaque carpelle est biovulé, à ovules anatropes bitégumentés (fig. 20 : coupe longitudinale dans un carpelle de fleur épanouie; dessin d'ensemble); les fruits sont des follicules monospermes par suite de l'avortement de l'un des ovules (fig. 22 : coupe longitudinale dans un carpelle fécondé depuis quelque temps; dessin d'ensemble. On y voit la dégénérescence d'un des ovules).

Péricarpe.

Structure de l'ovaire dans la fleur épanouie.

Une coupe transversale telle que celle de la figure 21 montre cinq assises de cellules; il n'y a ni stomates ni poils.

---

(1) A.-P. De Candolle, *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis*, 1824, t. I, p. 30.

Structure du péricarpe à la maturité.

Six assises de cellules (fig. 24 : coupe transversale dans le péricarpe peu avant la maturité).

Ep. e. à cellules un peu allongées longitudinalement, à contours rectilignes, à paroi externe épaisse. Des stomates et des poils courts, unicellulaires et pointus, assez rares, localisés dans la région située au-dessus du niveau de l'insertion du style.

Tf. à quatre assises de cellules parenchymateuses méatiques.

Ep. i. à cellules fibreuses très allongées longitudinalement (excepté dans la région située en dessous du style où elles le sont horizontalement), à parois toutes épaisses, sclérifiées (fig. 25 : une cellule de l'*Ep. i.* vue de face).

Faisceaux au nombre de trois : un médian (M) et deux latéraux (L) jamais reliés par des anastomoses (fig. 23 : coupe transversale dans le péricarpe peu avant la maturité ; dessin d'ensemble).

Spermoderme.

Structure de l'ovule dans la fleur épanouie.

A cause de la protérandrie très marquée qui existe dans les fleurs de *X. apiifolia,* ce stade comporte essentiellement deux périodes :

1° *Période de la puberté des étamines* à laquelle on peut donner comme étendue depuis l'épanouissement de la fleur jusqu'à la chute des étamines.

Pendant cette période, l'ovule est encore réduit à l'état de mamelon sans tégument, dans lequel on reconnaît la cellule mère du sac embryonnaire (fig. 26 : coupe longitudinale d'un ovule pendant la première période de la fleur épanouie), et le prolongement styliforme du carpelle est recourbé en avant ;

2° *Période de la puberté des carpelles* pendant laquelle les styles se sont redressés et dont la fin est indéterminable, à moins

qu'on ne veuille admettre comme telle la chute des pétales et des sépales. Dès ce moment aussi commence le développement en hauteur de la partie inférieure de la région ventrale (fig. 22).

Primine à quatre assises de cellules.

Secondine à deux assises.

Nucelle : *Ep. N.* simple au sommet.

Tf. N. à plusieurs assises.

Spermoderme de la graine mûre.

Le spermoderme est formé aux dépens de la primine, de la secondine et du nucelle (fig. 27 : coupe transversale dans une graine peu avant la maturité, dessin d'ensemble ; fig. 28 : détails de la coupe précédente ; fig. 29 : coupe transversale du spermoderme mûr).

Primine : *Ep. e. P.* à cellules assez hautes, un peu allongées longitudinalement, à paroi externe très épaisse, de même que le quart externe des parois latérales ; cuticule très distincte ; le reste des parois latérales et les parois internes minces (fig. 30 : portion de l'*Ep. e. P.* vu de face).

Tf. P. à deux assises parenchymateuses, écrasées.

Ep. i. P. à cellules à parois minces, écrasées.

Secondine : *Ep. e. S.* à cellules écrasées.

Ep. i. S. à cellules tabulaires, à paroi interne épaisse, pourvues de franges d'épaississement atteignant les deux tiers de la hauteur des cellules (fig. 31 : portion de l'*Ep. i. S.* vu de face).

Nucelle : *Ep. N.* persistant, à cellules carrées, à parois minces.

Albumen à contenu aleurique.

Note critique.

Les caractères anatomiques fournis par le péricarpe et surtout par le spermoderme font ressortir davantage les ressemblances dont Baillon [1] a signalé l'existence entre l'*Aquilegia* et

[1] H. Baillon, *loc. cit.*, p. 6.

le *Xanthorrhiza*. Certes, à les prendre isolément, ils ne constitueraient pas un argument bien décisif en faveur de l'opinion de cet auteur. L'un des caractères les plus remarquables du *Xanthorrizha* consiste dans la direction longitudinale des fibres de l'*Ep. i.* du péricarpe. Ce fait ne se retrouve dans aucun des genres de la tribu des Helléborées dans le sens restreint que je lui ai assigné ailleurs (1). Cependant, cette anomalie n'est qu'apparente si l'on se rappelle que le sommet organique du fruit est rejeté sur le côté et est dominé par la région ventrale qui occupe l'extrémité distale du grand axe de l'organe. Il en résulte que les fibres de l'*Ep. i.* du péricarpe sont toujours dirigées transversalement par rapport à la suture ventrale, tout au moins dans sa partie la plus ancienne, qui est seule active, c'est-à-dire qui est seule capable de s'ouvrir par déhiscence.

Selon Leclercq du Sablon (2), celle-ci est provoquée, d'une manière générale, par la présence d'éléments allongés suivant le sens de l'ouverture du fruit et qui se trouvent le long des deux côtés du plan de déhiscence. Souvent, d'après cet auteur, ce sont les éléments des faisceaux libéroligneux latéraux (L) qui seuls concourent à cet effet. D'un autre côté, sans en conclure que l'épaississement des parois cellulaires soit une condition *sine qua non*, il affirme qu' « un tissu de fibres ou de cellules se contracte d'autant plus que les parois cellulaires sont plus épaisses (3) ». Or, dans le cas du *Xanthorrhiza*, les faisceaux qui courent le long de la suture ventrale ont des éléments peu nombreux, à peine différenciés et à parois minces. D'ailleurs j'ai toujours constaté que, dans tous les fruits déhiscents, il existait au moins une assise de cellules fibreuses à parois épaisses, allongées

---

(1) H. Lonay, *loc. cit.*, p. 129. Il y a lieu de faire observer qu'une erreur s'est glissée dans le texte à la page 97 de ce travail : chez le *Trollius*, les cellules de l'*Ep. i.* du péricarpe sont allongées tangentiellement et non longitudinalement. C'est ce qui ressort clairement d'ailleurs des explications données à la page 161 *ibid.*

(2) Leclercq du Sablon, *Recherche sur la déhiscence des fruits à péricarpe sec.* (Ann. des Sciences nat., Botanique, 6e sér., t, XVIII.)

(3) *Loc. cit* , p. 24.

transversalement ou du moins très obliquement par rapport au plan de la déhiscence, qui certainement ne doivent pas être étrangères à ce dernier phénomène.

Au surplus, comme objection topique à la thèse soutenue par Leclerq du Sablon, je pourrais invoquer le cas des fruits akénoïdes de plusieurs *Ranunculus*, où l'on constate la présence de couches puissantes de fibres longitudinales à parois épaisses, ainsi que des lignes de suture à la région ventrale, et qui restent parfaitement indéhiscents.

Le cas du fruit si curieux de *Xanthorrhiza* rentre donc dans la généralité. Seulement son organisation est telle qu'au lieu de s'ouvrir en long comme une follicule ordinaire, il s'ouvre à son sommet comme une capsule denticide, par exemple, ce qui a évidemment pour effet de ménager, pour une même fleur, une dissémination successive des graines qu'elle engendre en si petite quantité.

Quant au spermoderme, la nature de son *Ep. e. P.* fait rentrer la graine du *Xanthorrhiza* dans le groupe à graines lisses des Helléborées *s. s.* et, plus spécialement encore, met ce genre tout à côté des *Aquilegia*.

Par l'*Ep. i. S.*, le *Xanthorrhiza* se sépare nettement des genres *Actaea, Cimicifuga* et *Pœonia*, qui forment la tribu des Pœoniées, dans laquelle il fut longtemps classé (1).

Ces trois genres présentent, à cette assise, des cellules plus ou moins épaissies et munies généralement de ponctuations fusiformes allongées perpendiculairement au sens de l'aplatissement (2). Des *Ep. i. S.* munis de cellules frangées existent, au contraire, chez la plupart des Helléborées.

L'*Ep. N.* simple au sommet est encore un caractère commun au *Xanthorrhiza* et à l'*Aquilegia*, et n'existe pas chez la plupart des Pœoniées.

J'estime donc qu'il y a lieu de placer le genre *Xanthorrhiza* immédiatement avant l'*Aquilegia*.

---

(1) A.-P. De Candolle, *loc. cit*, p. 65.

(2) H. Lonay, *loc. cit.*, p. 115, et fig. 174, 175, 177 et 351.

GENRE COPTIS .

COPTIS TRIFOLIA Salisb.

De ce genre, deux espèces ont fleuri au Jardin botanique de Liége. Ce sont le *C. trifolia* Salisb. et le *C. brachypetala* S. et Z.; mais seule la première a donné des fruits mûrs.

L'aire de dispersion de ces deux espèces est très différente : le *C. trifolia* se trouve répandu, suivant l'assertion de Prantl (1), dans le domaine arctique et subarctique (Russie moyenne, Japon, Amérique du Nord). Franchet (2) lui accorde une dispersion moins étendue; selon lui, le *C. trifolia* ne se trouverait qu'en Mandchourie et au Japon. Dans tous les cas, il semble acquis que ce soit l'espèce la plus répandue du genre. L'autre espèce n'est signalée par Franchet qu'au Japon.

Cet auteur serait assez porté à réunir en un seul genre les *Isopyrum* et les *Coptis*. Nous verrons si cette manière de voir, fondée sur l'organisation florale, se vérifie par l'examen comparatif de la structure du péricarpe et du spermoderme.

Les Coptis ont les carpelles multiovulés; les ovules anatropes bitégumentés, la graine albuminée à surface lisse.

Péricarpe.

Structure des parois de l'ovaire dans la fleur épanouie.

Six assises (*C. brachypetala*) ou sept ou huit assises de cellules (*C. trifolia*).

Ep. e. à cellules à peu près isodiamétriques, à paroi externe épaisse. Des stomates; pas de poils.

Tf. à quatre (*C. brachypetala*) ou cinq ou six assises de cellules (*C. trifolia*) laissant entre elles de petits méats.

Ep. i. à cellules tabulaires très larges.

---

(1) Engler und Prantl, *loc. cit.*, p. 58.

(2) Franchet, *Isopyrum et Coptis, leur distribution géographique.* (Journal de Botanique, 1897.)

Structure du péricarpe à la maturité.

Le nombre des assises cellulaires n'a pas augmenté (fig. 33, *C. trifolia :* coupe transversale dans une follicule presque mûre).

Ep. e. à cellules un peu tabulaires, à contours sinueux quand on les voit de face (fig. 34 : *Ep. e.* vu de face), à paroi externe épaisse, les autres minces, contenant des sphéro-cristaux (fig. 35 : un sphéro-cristal isolé); des stomates; pas de poils.

Tf. à cinq ou six assises de cellules parenchymateuses, les internes plus écrasées que les externes.

Ep. i. à cellules allongées longitudinalement ou un peu obliquement, à parois épaisses, ponctuées, à contours assez sinueux quand on les voit de face (fig. 36 : *Ep. i.* vu de face).

Faisceaux : Trois (*C. trifolia*) ou cinq (*C. brachypetala;* fig. 32 : coupe transversale dans un ovaire de fleur épanouie, longitudinale dans l'ovule; dessin d'ensemble).

Spermoderme.

Structure de l'ovule dans la fleur épanouie.

Primine à cinq (*C. trifolia;* fig. 37 : coupe longitudinale d'un ovule de fleur épanouie) ou six (*C. brachypetala,* fig. 32) assises cellulaires.

Secondine à deux (*C. trifolia*) ou trois assises (*C. brachypetala*).

Nucelle : *Ep. N.* double au sommet.

Tf. N. présentant au sommet deux assises de cellules (*C. trifolia*) ou résorbé (*C. brachypetala*).

Sac embryonnaire assez petit dans le *C. trifolia,* plus grand dans l'autre espèce.

Spermoderme de la graine mûre.

Le spermoderme procède de la différenciation de la primine, de la secondine et de quelques restes du nucelle (fig. 38 : coupe transversale dans le spermoderme à la maturité).

Primine : *Ep. e. P.* à cellules assez hautes et allongées longitudinalement, à paroi externe très épaisse, ainsi que la moitié externe des parois latérales, formant ainsi des épaississements en fer à cheval colorés en brun jaunâtre assez prononcé; le reste des parois latérales ainsi que les parois internes sont minces (fig. 39 : *Ep. e. P.* vu de face).

Tf. P. différencié en deux couches : 1° une assise hypodermique dont presque toutes les cellules ont des parois épaisses et ne sont pas écrasées; 2° cellules à parois minces, disposées en trois ou quatre assises de plus en plus écrasées vers l'intérieur.

Ep. i. P. à cellules à parois minces écrasées.

Secondine : *Ep. e. S.* à cellules écrasées.

Ep. i. S. à cellules tabulaires présentant, à la paroi interne, des franges d'épaississement jusqu'à mi-hauteur des cellules (fig. 40 : *Ep. i. S.* vu de face).

Nucelle à deux assises persistantes, écrasées.

Albumen à cellules à parois peu épaissies, à contenu aleurique.

Note critique.

De tous ces caractères, il résulte que le *Coptis* diffère beaucoup de l'*Isopyrum*. Tandis que, comme nous l'avons démontré autrefois (1), l'anatomie des organes séminaux de ce dernier genre tend à le rapprocher des *Delphinium*, le *Coptis* avec ses graines lisses et les diverses particularités de son spermoderme, ainsi qu'en raison de la structure de son péricarpe, se rapproche infiniment plus du groupe des Helléborées *s. s.* et plus particulièrement de l'*Aquilegia* par son *Ep. e. P.*, et du *Caltha* par son péricarpe et les autres parties du spermoderme. Sa place se trouve donc entre ces deux genres.

Ces conclusions sont donc un argument pour maintenir séparés les genres *Isopyrum* et *Coptis*.

---

(1) H. Lonay, *loc. cit.*, p. 101.

GENRE ACTINOSPORA (?)

A. DAHURICA Turcz.

Carpelle multiovulé; ovule anatrope bitégumenté; graine albuminée.

Péricarpe.

Structure des parois de l'ovaire dans la fleur épanouie.

Six assises de cellules (fig. 41 : coupe transversale dans un ovaire de fleur épanouie).

Ep. e. à cellules isodiamétriques à paroi externe un peu épaissie; poils de deux sortes : les uns courts et renflés en ampoule (fig. 41), les autres plus longs, plus ou moins cylindriques, recourbés (fig. 42 : un poil cylindrique recourbé de l'*Ep. e.*); des stomates.

Tf. constituant un parenchyme homogène, méatique.

Ep. i. à cellules un peu allongées tangentiellement, à parois externe et interne un peu épaissies.

Structure du péricarpe à la maturité.

Péricarpe parcheminé, le fruit étant une follicule.

Six ou sept assises de cellules (fig. 44 : coupe transversale du péricarpe mûr).

Ep. e. à cellules plus ou moins tabulaires, à paroi externe épaisse, à paroi interne un peu épaissie aussi, mais à parois latérales minces.

Tf. à quatre assises de cellules de forme irrégulière, à parois assez minces, laissant entre elles de larges méats, rappelant quelque peu le parenchyme spongieux des feuilles.

Ep. i. à cellules assez allongées dans le sens tangentiel, à parois fortement épaissies, les latérales montrant de nombreuses ponctuations.

Faisceaux au nombre de neuf, disposés comme suit :

L *i i' i'* M *i' i' i* L (fig. 43 : coupe transversale d'une follicule mûre; dessin d'ensemble). Tous les *i* et *i'* se terminent en se bifurquant au préalable et en se jetant dans les faisceaux voisins. Les *i* envoient en outre vers les L des anastomoses très allongées; les L et le M se terminent librement, celui-ci d'abord, les L un peu plus haut.

Spermoderme.

Structure de l'ovule dans la fleur épanouie.

Primine à trois ou quatre assises de cellules (fig. 45 : coupe longitudinale d'un ovule de fleur épanouie).

Secondine à deux assises cellulaires.

Nucelle : *Ep. N.* simple au sommet.

Tf. N. résorbé au sommet.

Spermoderme de la graine mûre.

Spermoderme formé aux dépens de la primine, de la secondine et du nucelle (fig. 46 : coupe transversale d'une graine mûre ; dessin d'ensemble).

Primine (fig. 47 : coupe transversale de la primine de la graine mûre dans la région dorsale; fig. 48 : idem dans la région latérale ailée).

Ep. e. P. irrégulièrement palissadique; cellules d'inégale hauteur, quelques-unes parfois assez basses, à parois externe et latérales épaisses (fig. 47), d'autres très hautes, dont la base très large, en forme de selle, embrasse la moitié du contour d'une grande lacune qui s'est formée en dessous de chacune de ces cellules, aux dépens de méats situés entre les cellules de l'assise externe du *Tf. P.* et celles de l'*Ep. e. P.* (fig. 48). Ces hautes cellules sont disposées aux deux extrémités du plan diamétral de la graine perpendiculaire à celui qui passe par le faisceau du raphé. Elles s'étendent tout le long de la graine suivant ces deux lignes opposées et forment ainsi deux ailes dont l'action, s'ajou-

tant à celle des lacunes sous-jacentes pleines d'air, contribue à faire de ces graines de véritables aéroplanes minuscules, que le vent peut transporter très loin.

Tf. P. de deux à quatre assises de cellules parenchymateuses à grands méats.

Ep. i. P. à cellules tabulaires à parois un peu épaissies dans les régions ventrale et dorsale (fig. 47), minces dans les régions latérales (fig. 48).

Secondine (fig. 49 : coupe transversale de la secondine de la graine mûre) : *Ep. e. S.* à cellules tabulaires à parois un peu épaissies, plus plates et plus larges que celles de l'*Ep. i. P.* et fortement écrasées dans la graine mûre.

Ep. i. S. à cellules tabulaires moins écrasées, plus ou moins larges et moins plates que les précédentes et à parois latérales munies de ponctuations fusiformes allongées suivant le sens de la hauteur des cellules.

Nucelle (fig. 50 : coupe transversale dans le nucelle et l'albumen de la graine mûre) : *Ep. N.* à cellules isodiamétriques, à parois minces et très sinueuses sur la coupe transversale, visible seulement après l'action prolongée des réactifs.

Tf. N. à une ou deux assises de cellules persistantes, à parois minces fortement écrasées.

Albumen à cellules assez grandes, à contenu aleurique.

Note critique.

En comparant ce qui précède avec la description que nous avons faite ailleurs [1] des organes similaires du *Cimicifuga racemosa* Ell., nous sommes obligé de conclure que l'*Actinospora dahurica* est simplement une espèce de *Cimicifuga*, et nous devons rejeter l'existence du genre *Actinospora*. Celui-ci fut créé en 1835 [2] pour des plantes ayant le port des *Actaea*, mais dont les caractères, fondés sur la conformation des fleurs et des fruits,

---

[1] H. Lonay, *loc. cit.*, p. 115.
[2] Fischer et Meyer, *loc. cit.*

doivent, eux aussi, les faire considérer comme formant une espèce du genre *Cimicifuga*. Ce dernier, admis par Linné, fut incorporé par De Candolle (1) au genre *Actaea;* mais Bentham et Hooker (2) se rangèrent au parti de Linné et établirent trois sous-genres de *Cimicifuga : Macrotys*, *Pityrosperma* et *Actinospora*. Enfin Engler et Prantl (3) ont réintégré les *Cimicifuga* parmi les *Actaea*, où ils reconnaissent deux sous-genres : *Euactaea* et *Cimicifuga;* mais pour ce faire, ils ont démembré l'ancien genre *Cimicifuga*, en lui enlevant, pour le mettre au nombre des *Euactaea*, le *Cimicifuga racemosa* Ell. (*Botrophis actaeoides* Rafin), qui à lui seul formait le sous-genre *Macrotys* de Bentham et Hooker. J'ai peine à adopter la manière de voir d'Engler et Prantl pour ce dernier point; car je pense que le caractère fourni par la nature du fruit est, chez les Renonculacées en particulier, beaucoup plus constant et partant beaucoup plus important que celui de la corolle ou des staminodes qui est si variable. D'ailleurs, j'ai cru moi-même devoir maintenir, dans mon premier mémoire (4), le genre *Cimicifuga*.

---

(1) A.-P. De Candolle, *loc. cit.*, p. 64.
(2) Bentham et Hooker, *loc. cit.*
(3) Engler und Prantl, *loc. cit.*, p. 59.
(4) H. Lonay, *loc. cit.*, p. 115.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Les recherches qui précèdent ne font que me confirmer dans l'opinion que j'ai émise autrefois (1) sur l'importance du rôle de l'anatomie des péricarpes et spermodermes au point de vue de la systématique pure. Je puis même renforcer cette opinion en disant que, dans bien des circonstances où un doute s'élève quant à la place à assigner à tel ou tel genre dans le système, l'étude histologico-anatomique des organes précités décidera presque à coup sûr de la question : les cas du *Trautvetteria palmata* Fisch. et Mey. et surtout du *Callianthemum rutifolium* C.-A. Mey. en sont des exemples frappants.

Bien plus, et j'en ai déjà fait la remarque dans mes premières recherches, les affinités spécifiques se révèlent, on ne peut mieux, dans ce domaine d'investigations. Ce fait s'affirme surtout si, au moyen des tableaux dichotomiques que j'ai dressés à l'occasion de ces premières recherches (2), on se demande quelle place on doit assigner aux genres, puis aux espèces dont l'examen fait l'objet du présent travail. On verrait ainsi, de toute évidence, que le *Trautvetteria palmata* vient se fixer tout à côté de l'*Oxygraphis*, que le *Callianthemum* a sa place marquée tout près de l'*Adonis*, que le *Xanthorrhiza* et les *Coptis* doivent venir se ranger dans le voisinage des *Aquilegia* ou des *Caltha*, et que l'*Actinospora* ne fait qu'un avec les *Cimicifuga*.

---

(1) H. Lonay, *loc. cit.*, p. 132.
(2) Idem, p. 133.

Au point de vue des espèces, il ressort tout aussi clairement de l'étude qui précède que le *Ranunculus amplexicaulis* L. est très voisin du *R. platanifolius* L., et la comparaison entre les *R. divaricatus* Schrk., *R. fluitans* Lam. et *R. hederaceus* L. peut servir de pierre de touche pour la valeur à donner à l'examen anatomique des péricarpes et des spermodermes au point de vue de la distinction des espèces. En effet, ces trois espèces offrent entre elles beaucoup de ressemblances; mais les deux premières présentent incontestablement beaucoup plus d'affinité entre elles qu'avec le *R. hederaceus*, ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'elles ont toutes deux été longtemps considérées comme de simples variétés du *R. aquatilis* L.

PLANCHES

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LES FIGURES.

ac.	Acropyle.	M.	Faisceau médian.
Alb.	Albumen.	N.	Nucelle.
Cot.	Cotylédon.	P.	Primine.
e.	Externe.	R.	Raphé.
Ep.	Épiderme.	*rud.*	Ovule rudimentaire.
i.	Faisceau intermédiaire.	S.	Secondine.
i.	Interne.	*Sac.*	Sac embryonnaire.
L.	Faisceau latéral.	T.	Tégument.
m.	Moyen.	*Tf.*	Tissu fondamental.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

Ranunculus hederaceus L.

Fig. 1. — Coupe transversale du péricarpe, peu de temps avant la maturité de l'akène.

Ranunculus amplexicaulis L.

Fig. 2. — Coupe transversale pratiquée vers le milieu du péricarpe d'un akène mûr. Dessin d'ensemble.

Fig. 3. — Coupe transversale dans le spermoderme mûr après l'action de la potasse.

Callianthemum Kernerianum Fryn.

Fig. 4 — Coupe longitudinale d'un carpelle d'une fleur épanouie. Dessin d'ensemble.

Fig. 5. — Coupe transversale dans un carpelle de fleur épanouie. Dessin d'ensemble.

Callianthemum rutifolium C.-A. Mey.

Fig. 6. — Coupe transversale dans le péricarpe peu de temps avant la maturité. Région externe.

Fig. 7. — Même coupe. Région interne.

Fig. 8. — *Ep. e.* du péricarpe vu de face.

Fig. 9. — Coupe transversale d'un akène peu de temps avant la maturité. Dessin d'ensemble.

Fig. 10 — Coupe transversale du spermoderme presque mûr.

Fig. 11. — Coupe transversale du spermoderme mûr, faite à sec et modérément traitée par la potasse à chaud.

Fig. 12. — *Ep. e. P.* d'une graine mûre vu de face.

Trautvetteria palmata Fisch. et Mey.

Fig. 13. — Coupe longitudinale d'un carpelle d'une fleur épanouie. Dessin d'ensemble.

Fig. 14. — Coupe transversale de la paroi latérale d'un ovaire de fleur épanouie.

Fig. 15. — Coupe longitudinale dans un ovule de fleur épanouie.

Fig. 16. — Coupe transversale dans un akène mûr. Dessin d'ensemble.

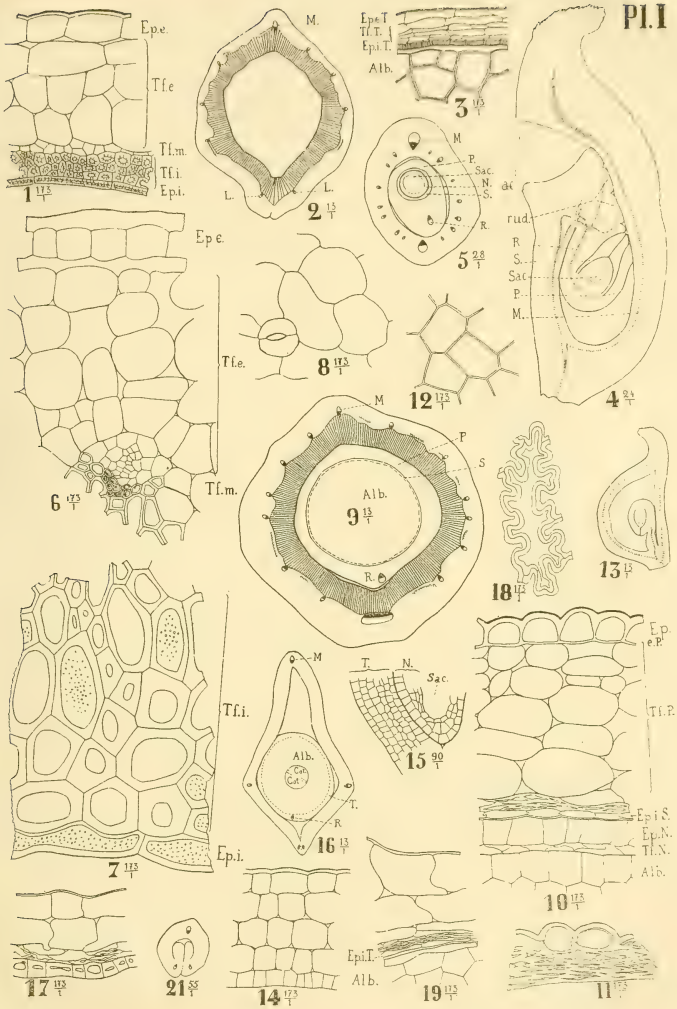
Fig. 17. — Coupe transversale dans le péricarpe mûr.

Fig. 18. — Une cellule de l'*Ep. i.* du péricarpe vue de face.

Fig. 19. — Coupe transversale du spermoderme mûr.

Xanthorrhiza apiifolia L'Hér.

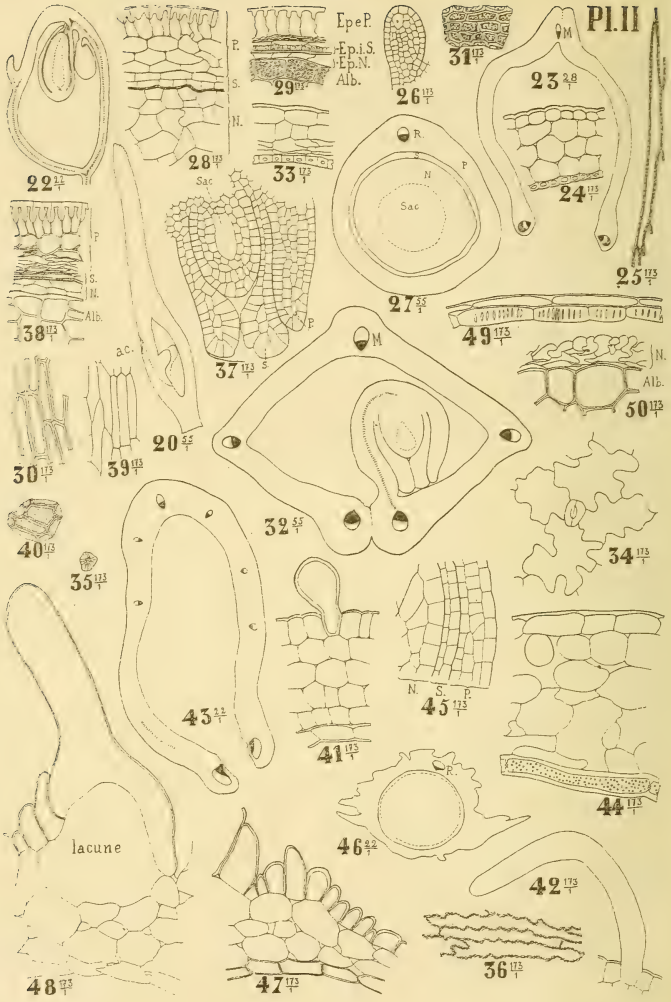
Fig. 21. — Coupe transversale dans un carpelle de fleur épanouie. Dessin d'ensemble.



Hyac. Lonay ad nat. del.

Lith. J.L. Goffart Bruxelles

Genres : Ranunculus (1-3)
Callianthemum (4-12)
Trautvetteria (13-19)
Xanthorrhiza (21)



Hyac. Lonay ad nat. del. *Lith. J.L. Goffart, Bruxelles.*

Genres : Xanthorrhiza (20-31)
Coptis (32-40)
Actinospora (41-50)

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Xanthorrhiza apiifolia L'Hér.

Fig. 20. — Coupe longitudinale dans un carpelle de fleur épanouie. Dessin d'ensemble.
Fig. 21. — Voir planche I.
Fig. 22. — Coupe longitudinale dans un carpelle fécondé depuis quelques jours. Dessin d'ensemble.
Fig. 23. — Coupe transversale dans le péricarpe peu avant la maturité. Dessin d'ensemble.
Fig. 24. — Détails de la coupe précédente.
Fig. 25. — *Ep. i.* du péricarpe : une cellule vue de face.
Fig 26. — Coupe longitudinale d'un ovule de fleur épanouie, pendant la première période.
Fig. 27 — Coupe transversale dans une graine peu avant la maturité. Dessin d'ensemble.
Fig. 28. — Détails de la coupe précédente.
Fig. 29. — Coupe transversale du spermoderme mûr.
Fig. 30. — *Ep. e. P.* vu de face.
Fig. 31. — *Ep. i. S.* vu de face.

Coptis brachypetala S. et Z.

Fig. 32. — Coupe transversale dans un ovaire de fleur épanouie, longitudinale dans l'ovule. Dessin d'ensemble.

Coptis trifolia Salisb.

Fig. 33. — Coupe transversale dans le péricarpe presque mûr.
Fig. 34. — *Ep. e.* du péricarpe vu de face.
Fig. 35. — Un sphéro-cristal extrait d'une cellule de l'*Ep. e.* du péricarpe.
Fig. 36. — *Ep. i.* du péricarpe vu de face.
Fig. 37. — Coupe longitudinale d'un ovule de fleur épanouie.
Fig. 38. — Coupe transversale dans le spermoderme d'une graine mûre.
Fig. 39. — *Ep. e. P.* vu de face.
Fig. 40. — *Ep. i. S.* vu de face.

Actinospora dahurica Turcz.

Fig. 41. — Coupe transversale dans un ovaire de fleur épanouie.
Fig. 42. — Poil cylindrique recourbé de l'*Ep. e.* de l'ovaire.
Fig. 43. — Coupe transversale d'une follicule mûre. Dessin d'ensemble.
Fig. 44. — Détails de la coupe précédente.
Fig. 45. — Coupe longitudinale dans un ovule de fleur épanouie.
Fig. 46. — Coupe transversale d'une graine mûre. Dessin d'ensemble
Fig. 47. — Coupe transversale de la primine de la graine mûre dans la région dorsale.
Fig. 48. — Même coupe, région latérale.
Fig. 49. — Coupe transversale de la secondine de la graine mûre.
Fig. 50. — Coupe transversale du nucelle et de l'albumen de la graine mûre.

TABLE DES MATIÈRES

pages.

AVANT-PROPOS 3

GENRE RANUNCULUS 5
R. amplexicaulis L. 5
R. hederaceus L. 7
R. fluitans Lam. 8

GENRE TRAUTVETTERIA 9
T. palmata Fisch. et Mey. 9
Note critique 11

GENRE CALLIANTHEMUM 12
C. rutifolium C.-A. Mey. 12
Note critique 15

GENRE XANTHORRHIZA 17
X. apiifolia L'Hér. 17
Note critique 19

GENRE COPTIS. 22
C. trifolia Salisb. 22
Note critique 24

GENRE ACTINOSPORA 25
A. dahurica Turcz 25
Note critique 27

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS 29

PLANCHES 31
Abréviations employées dans les figures 31
Explication de la planche I 32
Explication de la planche II. 33

3 2044 106 293 194